RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1911.

P. Blaserna, Presidente.

MEMORIE E NOTE
DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sulla espressione del resto in una operazione funzionale usata da Lord Rayleigh.* Nota del Socio T. Levi-Civita.

1. Pongasi, per una generica funzione V della variabile φ,

$$DV = \frac{dV}{d\varphi} \quad , \quad D^2V = \frac{d^2V}{d\varphi^2}, \text{ ecc.}$$

Se $p(D)$ indica un polinomio in D (a coefficienti costanti)

$$c_0 + c_1 D + c_2 D^2 + \cdots + c_n D^n,$$

la scrittura

$$p(D)\, V$$

sta manifestamente a rappresentare la somma

$$c_0 + c_1 DV + c_2 D^2V + \cdots + c_n D^nV.$$

Consideriamo più generalmente una funzione $p(D)$ del simbolo D, la quale (trattandovi per un momento D come una effettiva variabile) sia regolare nell'intorno dell'origine, e quindi sviluppabile in una serie di potenze di D (a coefficienti costanti) del tipo $\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu D^\nu$.

Qualora (in un certo campo) risulti assolutamente convergente la serie

$$\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu \mathrm{D}^\nu \mathrm{V},$$

è naturale di porre [1] (per quelle V e in quel campo in cui la convergenza sussiste)

$$\mathfrak{p}(\mathrm{D})\mathrm{V} = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu \mathrm{D}^\nu \mathrm{V}.$$

Da tale definizione risulta ovviamente che, se $\mathfrak{p}_1(\mathrm{D})$ e $\mathfrak{p}_2(\mathrm{D})$ sono due operazioni della specie considerata, esse sono altresì permutabili e componibili coll'ordinaria regola di moltiplicazione, tostochè siano soddisfatte debite condizioni di convergenza. Si ha cioè, indicando con $\mathfrak{p}(\mathrm{D})$ il prodotto (nel senso ordinario) delle due funzioni $\mathfrak{p}_1(\mathrm{D})$, $\mathfrak{p}_2(\mathrm{D})$ (del simbolo D),

$$\mathfrak{p}_2(\mathrm{D})\{\mathfrak{p}_1(\mathrm{D})\mathrm{V}\} = \mathfrak{p}_1(\mathrm{D})\{\mathfrak{p}_2(\mathrm{D})\mathrm{V}\} = \mathfrak{p}(\mathrm{D})\mathrm{V}.$$

2. Prendiamo a considerare una funzione $\gamma(f)$ della variabile complessa $f = \varphi + i\psi$, reale sull'asse reale $\psi = 0$, e regolare nella striscia S compresa fra le rette $\psi = \pm 1$ (contorno incluso).

Detta $r(\varphi)$ la funzione reale, cui si riduce γ per $\psi = 0$, potremo dedurne $\gamma(\varphi + i)$ mediante la serie di Taylor.

Colle notazioni, testè richiamate, del calcolo funzionale, ciò si traduce nella formula

$$\gamma(\varphi + i) = e^{i\mathrm{D}} r .$$

Scindendo il reale dall'immaginario, ove α e β designino rispettivamente la parte reale e il coefficiente di i in $\gamma(\varphi + i)$, se ne trae

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha(\varphi) = \cos \mathrm{D} \,.\, r , \\ \beta(\varphi) = \operatorname{sen} \mathrm{D} \,.\, r . \end{cases}$$

Ove si possano ulteriormente applicare le operazioni $\operatorname{tg} \mathrm{D}$, $\mathrm{D} \cot \mathrm{D}$ (che rientrano entrambe nel tipo $\mathfrak{p}(\mathrm{D})$ del n.° precedente), abbiamo dalla prima delle (1)

$$\operatorname{tg} \mathrm{D} \,.\, \alpha = \operatorname{tg} \mathrm{D} \cos \mathrm{D} \,.\, r = \operatorname{sen} \mathrm{D} \,.\, r ,$$

e dalla seconda

$$\mathrm{D} \cot \mathrm{D} \,.\, \beta = \mathrm{D} \cot \mathrm{D} \operatorname{sen} \mathrm{D} \,.\, r = \mathrm{D} \cos \mathrm{D} \,.\, r .$$

Avendo riguardo alle (1) stesse, vien fatto di eliminare r, e rimane

$$\begin{cases} \operatorname{tg} \mathrm{D} \,.\, \alpha = \beta , \\ \mathrm{D} \cot \mathrm{D} \,.\, \beta = \mathrm{D}\alpha , \end{cases}$$

[1] Cfr. Pincherle e Amaldi, *Le operazioni distributive*. Bologna, Zanichelli, 1901, Cap. VI.

che costituiscono, come si vede, due relazioni funzionali tra le funzioni associate α e β (dei punti della retta $\psi = 1$).

Giova mettere in evidenza che si tratta di due relazioni equivalenti, anzi più precisamente una inversa dell'altra, scrivendo α' in luogo di $D\alpha$ e $\frac{\operatorname{tg} D}{D} \cdot \alpha'$ in luogo di $\operatorname{tg} D \,.\, \alpha$. Esse assumono così l'aspetto

$$(2) \qquad \begin{cases} \beta = \dfrac{\operatorname{tg} D}{D} \cdot \alpha', \\ \alpha' = D \cot D \,.\, \beta \,. \end{cases}$$

Per $\frac{\operatorname{tg} D}{D}$ e $D \cot D$ si devono naturalmente intendere i loro sviluppi in serie di potenze di D, cioè [1]

$$(3) \qquad D \cot D = 1 - 2\frac{s_2}{\pi^2} D^2 - 2\frac{s_4}{\pi^4} D^4 - 2\frac{s_6}{\pi^6} D^6 - \cdots = 1 - 2\sum_1^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu},$$

$$(4) \qquad \frac{\operatorname{tg} D}{D} = \frac{D \cot D - 2D \cot 2D}{D^2} = 2\sum_1^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} (2^{2\nu} - 1) D^{2\nu-2} = 2\sum_0^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu+2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu+2}} \left(1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right) D^{2\nu} :$$

$s_{2\nu}$ indica la somma delle inverse delle potenze $(2\nu)^{esime}$ dei numeri naturali; in particolare si ha

$$s_2 = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64 \ldots, \; s_4 = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}08 \ldots, \; s_6 = \frac{\pi^6}{945} = 1{,}01 \ldots, \ldots$$

3. La effettiva validità delle (2) [colle espressioni (3) e (4) delle operazioni funzionali $D \cot D$, $\frac{\operatorname{tg} D}{D}$] è vincolata ad ipotesi enormemente restrittive circa la natura della funzione γ. Basta pensare che, per potere applicare senza riserve ad una γ una operazione

$$\mathfrak{p}(D) = \sum_0^\infty{}_\nu c_\nu D^\nu,$$

conviene introdurre limitazioni del tipo

$$|D^n \gamma| < M\varrho^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

con M numero finito indipendente da n, e ϱ inferiore al raggio di conver-

[1] Cfr. per es. Cesàro, *Corso di analisi algebrica*, Torino, Bocca, 1894, pp. 481 e 283.

genza della serie $\sum_0^\infty{}_\nu c_\nu D^\nu$. Nel caso nostro bisognerebbe prendere $\varrho < \frac{\pi}{2}$, che è il più piccolo dei due raggi di convergenza spettanti alle serie (3), (4).

In quest'ordine di idee, val forse la pena di notare che, per le *trascendenti intere di genere zero*, si ha la limitazione (1)

$$|D^n \gamma| < M,$$

corrispondente a $\varrho = 1$.

In base ad essa, le serie $D \cot D . \gamma$, $\frac{\operatorname{tg} D}{D} . \gamma$ convergono assolutamente in tutto il piano f, e ne rimangono rigorosamente dimostrate le (2). Ma la detta categoria di funzioni è press'a poco la sola per cui il risultato sussiste sotto forma di serie.

4. È invece possibile, ricorrendo alla teoria delle funzioni armoniche e trasformando opportunamente una formula del Dini (2), attribuire alle relazioni fra α e β, sulla retta $\psi = 1$, due forme integrali assai più vantaggiose. E precisamente una prima forma, risoluta rispetto a β, che è applicabile in ogni caso (*relazione dispari*), e una seconda, risoluta rispetto ad α' (*relazione inversa*), che richiede (o, meglio, la cui dimostrazione ha richiesto) una ipotesi addizionale circa il comportamento all'infinito della β.

Le due relazioni sono (gli apici designando derivazioni rispetto agli argomenti indicati)

$$\beta(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(\varphi_1 , \varphi)\, \alpha'(\varphi_1)\, d\varphi_1 , \tag{5}$$

$$\alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} L(\varphi_1 , \varphi)\, \beta''(\varphi_1)\, d\varphi_1 \tag{6}$$

con

$$K(\varphi_1 , \varphi) = \log \left(\frac{e^{\frac{\pi}{2}\varphi_1} + e^{\frac{\pi}{2}\varphi}}{e^{\frac{\pi}{2}\varphi_1} - e^{\frac{\pi}{2}\varphi}} \right)^2 , \tag{7}$$

$$L(\varphi_1 , \varphi) = \log \frac{1}{\left(1 - e^{-\pi|\varphi_1 - \varphi|}\right)^2} . \tag{8}$$

La (5) può ben dirsi valida incondizionatamente, essendo certo soddisfatta (3), ogniqualvolta si sappia che α' è funzione (dei punti della retta $\psi = 1$) continua al finito e finita anche all'infinito.

(1) Come risulta da un teorema generale di Poincaré. Veggasi ad es. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, Paris, Gauthier-Villars, 1900, pag. 56.

(2) Cfr. le Note: *Trasformazione di una relazione funzionale dovuta al Dini*, pp. 285-296, 381-391 di questi Rendiconti (sedute del 5 e 19 marzo u. s.).

(3) Da una e una sola funzione $\gamma(f)$ regolare entro la striscia S, e tale che la sua parte immaginaria $i\beta$ si mantiene ovunque finita (*contorno incluso*) [Cfr. pag. 387, seduta del 19 marzo].

La (6) è stata stabilita nell'ipotesi che $\beta(\varphi)$, oltre ad ammettere le prime due derivate (continue al finito), tenda ad annullarsi per $\varphi = \pm\infty$: quest'ultima è in sostanza la sola ipotesi restrittiva, potendosi tranquillamente ammettere — almeno nelle applicazioni che abbiamo in vista — che si tratti di funzioni derivabili quante volte occorre, e finite ovunque (anche all'infinito), assieme alle loro derivate.

5. Scopo della presente Nota è di ricavare dalle richiamate relazioni integrali — (5) e (6) — degli sviluppi differenziali, che contengono rispettivamente quanti si vogliano termini delle serie $\frac{\operatorname{tg} D}{D} \cdot \alpha'$, $D \cot D \cdot \beta$, più un resto. È chiaro che l'interesse risiede esclusivamente nell'espressione del resto. Essa ci mostrerà che le serie (2) (pur essendo quasi sempre divergenti, come abbiamo osservato poc'anzi) possono servire utilmente in calcoli approssimativi, quando si limitano a un numero conveniente di termini.

6. Occupiamoci dapprima della *relazione inversa* (6), che fa riscontro alla seconda delle (2). Sotto questa forma essa fu già rilevata e (in via di approssimazione) genialmente sfruttata da Lord Rayleigh nelle sue ricerche sull'onda solitaria (1).

Introduciamo, al posto di φ_1, una nuova variabile di integrazione

$$s = \pi(\varphi_1 - \varphi).$$

Per essere L funzione pari del solo argomento $\pi(\varphi_1 - \varphi)$, risulta subito

$$(6') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty L(s) \left\{ \beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right) \right\} ds ,$$

con

$$(8') \qquad L(s) = \log \frac{1}{(1 - e^{-s})^2} .$$

Se si ricorre all'identità

$$(9) \qquad \beta(\varphi + h) = \beta(\varphi) + h D\beta + \frac{h^2}{2} D^2\beta + \cdots + \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!} D^{2n-1}\beta + \\ + \frac{h^{2n}}{(2n-1)!} \int_0^1 (1-t)^{2n-1} D^{2n}\beta(\varphi + ht) \, . \, dt .$$

e la si applica alla funzione β'' facendovi $h = \pm \frac{s}{\pi}$, si ottiene

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right) = 2 \sum_0^{n-1} \frac{1}{(2\nu)!} \frac{s^{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu+2}\beta + \\ + \frac{1}{(2n-1)!} \frac{s^{2n}}{\pi^{2n}} \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{ D^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + D^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right) \right\} dt .$$

(1) Scientific Papers, vol. I, Cambridge University Press, 1899, pp. 256-261.

Procuriamoci il valore degli integrali definiti

$$\int_0^\infty s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}} \cdot ds \qquad (\nu \text{ intero positivo}),$$

che è del resto ben noto (1). Lo si calcola partendo dalla formula elementare

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-s}\, ds = (2\nu)!\,,$$

o, meglio, da questo suo corollario:

$$\int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms}\, ds = \frac{(2\nu)!}{m^{2\nu+1}}\,,$$

in cui m designa un qualsiasi numero positivo. Si immagini infatti di integrare $s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}}$ da un ε comunque piccolo a $+\infty$, sostituendo al logaritmo il suo sviluppo in serie di potenze di e^{-s}, e passando poi al limite per $\varepsilon = 0$. Si ha

$$(10) \qquad \int_0^\infty s^{2\nu} \log \frac{1}{1-e^{-s}} \cdot ds = \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m} \int_0^\infty s^{2\nu} e^{-ms}\, ds =$$

$$= (2\nu)! \sum_1^\infty{}_m \frac{1}{m^{2\nu+2}} = (2\nu)!\, s_{2\nu+2}\,.$$

Ciò posto, portiamo l'espressione sopra scritta di

$$\beta''\left(\varphi - \frac{s}{\pi}\right) + \beta''\left(\varphi + \frac{s}{\pi}\right)$$

nel secondo membro della (6'). In virtù delle (10), risulta

$$(6'') \qquad \alpha'(\varphi) = \beta(\varphi) - 2\frac{s_2}{\pi^2} \mathrm{D}^2\beta - 2\frac{s_4}{\pi^4} \mathrm{D}^4\beta - \cdots - 2\frac{s_{2n}}{\pi^{2n}} \mathrm{D}^{2n}\beta - \mathrm{R}_{2n}\,,$$

il resto R_{2n} avendo l'espressione

$$(11) \qquad \mathrm{R}_{2n} = \frac{1}{(2n-1)!} \frac{1}{\pi^{2n+2}} \times$$

$$\times \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{2n} \mathrm{L}(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1} \left\{ \mathrm{D}^{2n+2}\beta\left(\varphi + \frac{st}{\pi}\right) + \mathrm{D}^{2n+2}\beta\left(\varphi - \frac{st}{\pi}\right) \right. dt\,.$$

(1) Cfr. per es. Hermite, *Cours d'analyse*, pag. 96 della terza edizione, Paris, Hermann, 1887.

La coincidenza dei varî termini dello sviluppo trovato con quelli che sarebbero forniti dalla serie $D \cot D . \beta$ è manifesta: basta confrontare colla (3). Rendiamoci conto dell'ordine di grandezza del resto.

Seguendo una notazione espressiva introdotta dal sig. Schmidt, indichiamo con $\overline{\beta}$ il limite superiore dei valori (assoluti) assunti da una generica funzione β nel campo che si considera (sopra la retta $\psi = 1$ nel caso attuale).

L(s) mantenendosi positiva in tutto l'intervallo di integrazione, avremo dalla (11)

$$|R_{2n}| \leq \frac{1}{(2n-1)!} \frac{1}{\pi^{2n+2}} \overline{D^{2n+2}\beta} \int_0^\infty s^{2n} L(s)\, ds \int_0^1 (1-t)^{2n-1}\, dt .$$

L'integrale interno vale $\frac{1}{2n}$, quello rispetto ad s [a norma delle (8′) e (10)] $2 . (2n)! s_{2n+2}$. Si ha pertanto la limitazione

$$|R_{2n}| \leq \frac{2}{\pi^{2n+2}} s_{2n+2} \overline{D^{2n+2}\beta} . \tag{12}$$

Dacchè le s_{2n+2} differiscono poco dall'unità $\left(\text{la massima } s_2 \text{ è } \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64 \ldots\right)$, si può dire che l'ordine di grandezza di R_{2n} è dato dalla derivata $(2n+2)^{esima}$ di β, divisa per la corrispondente potenza di π.

In particolare, per $n = 1$, l'errore che si commette sostituendo il secondo membro della (6) con $\beta - \frac{1}{3}\beta''$ non può superare

$$2 \frac{s_4}{\pi^4} \overline{\beta^{(IV)}} = \frac{1}{45} \overline{\beta^{(IV)}} ,$$

cioè poco più di $^2/_{100}$ di $\overline{\beta^{(IV)}}$.

Per $n = 2$, il limite dell'analogo errore è

$$2 \frac{s_6}{\pi^6} \overline{\beta^{(VI)}} = \frac{2}{945} \overline{\beta^{(VI)}} .$$

7. L'approssimazione di Lord Rayleigh si è sostanzialmente esplicata riducendo $D \cot D . \beta$ a $\beta - \frac{1}{3}\beta''$, con presumibile errore dell'ordine di grandezza della derivata quarta. Come questa sua intuizione fosse corretta è provato dalla precedente espressione del resto. Non sarebbe stato invece possibile valutare direttamente l'ammontare dei termini trascurati

$$2 \sum_2^\infty{}_\nu \frac{s_{2\nu}}{\pi^{2\nu}} D^{2\nu+2}\beta$$

(sostituendovi per β la speciale espressione assegnata da Lord Rayleigh come soluzione approssimata del problema idrodinamico), perchè la serie risulta divergente.

8. Indichiamo, anche per la relazione dispari (5), lo sviluppo per derivate e la forma del resto.

Adottando come variabile di integrazione

$$s = \frac{\pi}{2}(\varphi_1 - \varphi),$$

e notando che $K(\varphi_1, \varphi)$, al pari di L, è funzione pari della sola differenza $\varphi_1 - \varphi$, la (5) stessa può essere scritta

$$(5') \qquad \beta(\varphi) = \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty K(s)\left\{\alpha'\left(\varphi - \frac{2}{\pi}s\right) + \alpha'\left(\varphi + \frac{2}{\pi}s\right)\right\} ds\,,$$

con

$$(7') \qquad K(s) = \log\left(\frac{1+e^{-s}}{1-e^{-s}}\right)^2.$$

Con procedimento analogo a quello tenuto per stabilire la (10), si ha

$$\int_0^\infty s^{2\nu}\log(1+e^{-s})\,ds = (2\nu)!\sum_1^\infty{}_m(-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}}\,.$$

Ne deduciamo

$$\int_0^\infty s^{2\nu}K(s)\,ds = 2(2\nu)!\left\{\sum_1^\infty{}_m(-1)^{m+1}\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \sum_1^\infty{}_m\frac{1}{m^{2\nu+2}}\right\} =$$

$$= 4(2\nu)!\,\Sigma'\frac{1}{m^{2\nu+2}}\,,$$

Σ' indicando una somma estesa ai soli numeri dispari. Se si introduce per un momento anche la somma complementare $\Sigma''\frac{1}{m^{2\nu+2}}$, estesa ai soli numeri pari, si hanno manifestamente le identità

$$\Sigma'\frac{1}{m^{2\nu+2}} + \Sigma''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = s_{2\nu+2}\,,$$

$$\Sigma''\frac{1}{m^{2\nu+2}} = \frac{1}{2^{2\nu+2}}s_{2\nu+2}\,,$$

da cui

$$\Sigma'\frac{1}{m^{2\nu+2}} = \left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\}s_{2\nu+2}\,.$$

Risulta così

$$(13) \qquad \int_0^\infty K(s)\,s^{2\nu}\,ds = 4(2\nu)!\left\{1 - \frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\}s_{2\nu+2}\,.$$

Dalla (9), sostituendovi α' in luogo di β, e $\pm\frac{s}{\frac{\pi}{2}}$ in luogo di h, si ricava

$$\alpha'\left(\varphi-\frac{2}{\pi}s\right)+\alpha'\left(\varphi+\frac{2}{\pi}s\right)=2\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\frac{1}{(2\nu)!}\frac{s^{2\nu}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu}}\mathrm{D}^{2\nu+1}\alpha+$$

$$+\frac{1}{(2n-1)!}\frac{s^{2n}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}\int_0^1(1-t)^{2n-1}\left\{\mathrm{D}^{2n+1}\alpha\left(\varphi+\frac{2st}{\pi}\right)+\mathrm{D}^{2n+1}\alpha\left(\varphi-\frac{2st}{\pi}\right)\right\}dt,$$

con che la (5′), tenuto conto della (13), e posto

$$\mathrm{R}^{\star}_{2n}=\frac{1}{4(2n-1)!}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}\times \tag{14}$$

$$\times\int_0^{\infty}s^{2n}\mathrm{K}(s)\,ds\int_0^1(1-t)^{2n-1}\left\{\mathrm{D}^{2n+1}\alpha\left(\varphi+\frac{2st}{\pi}\right)+\mathrm{D}^{2n+1}\alpha\left(\varphi-\frac{2st}{\pi}\right)\right\}dt,$$

assume la forma

$$\beta(\varphi)=2\sum_{0}^{n-1}{}_{\nu}\frac{s_{2\nu+2}}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2\nu+2}}\left\{1-\frac{1}{2^{2\nu+2}}\right\}\mathrm{D}^{2\nu}\alpha'+\mathrm{R}^{\star}_{2n}. \tag{5″}$$

I primi n termini coincidono con quelli dello sviluppo di $\frac{\mathrm{tg}\,\mathrm{D}}{\mathrm{D}}\cdot\alpha'$, come apparisce dalla (4). Quanto al resto, per essere $\mathrm{K}(s)$ essenzialmente positiva, si ha

$$|\mathrm{R}^{\star}_{2n}|\leq\frac{1}{2(2n-1)!}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}\overline{\mathrm{D}^{2n+1}\alpha}\int_0^{\infty}s^{2n}\mathrm{K}(s)\,ds\int_0^1(1-t)^{2n-1}\,dt,$$

donde, eseguendo le quadrature e badando alla (13),

$$|\mathrm{R}^{\star}_{2n}|\leq\frac{2}{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+2}}s_{2n+2}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right\}\overline{\mathrm{D}^{2n+1}\alpha}\,. \tag{15}$$

Siccome $s_{2n+2}\left\{1-\frac{1}{2^{2n+2}}\right\}$ tende ad 1 al crescere di n (differendone in ogni caso ben poco), si può dire che l'ordine di grandezza di $\mathrm{R}^{\star}_{2n}$ è quello della derivata $(2n+1)^{esima}$ di α divisa per la corrispondente potenza di $\frac{\pi}{2}$. La limitazione è un po' meno vantaggiosa di quella trovata per l'analogo

resto della relazione inversa: in quel caso si hanno a denominatore potenze di π, in questo soltanto potenze di $\frac{\pi}{2}$.

Mostrerò in una prossima comunicazione come effettivamente si applichino le equazioni integrali (5), (6) alla teoria delle onde di canale, e in particolare all'onda solitaria, conducendo, per quest'ultima, ad una approssimazione maggiore di quella raggiunta da Lord Rayleigh e, con diverso procedimento, da Boussinesq.

Meccanica. — *Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi.* Nota I del Corrisp. E. Almansi.

Matematica. — *Sopra i nuclei reiterati.* Nota del Corrisp. Giuseppe Lauricella.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Chimica vegetale. — *Ricerche sulla genesi degli alcaloidi nelle piante.* Nota del Socio G. Ciamician e di C. Ravenna.

In questa Nota esponiamo le esperienze da noi iniziate già da tre anni per cercare di risolvere qualche questione relativa all'origine degli alcaloidi nelle piante. A questo scopo abbiamo inoculato, col metodo altre volte descritto, alcune sostanze azotate a piante che contengono normalmente alcaloidi. Le piante prescelte furono la datura ed il tabacco; le sostanze adoperate, la piridina, la piperidina, l'acido carbopirrolico e per il tabacco, oltre a queste, l'asparagina, l'ammoniaca ed alcune sostanze non azotate, cioè il glucosio e l'acido ftalico.

RICERCHE SULLA DATURA

Una prima serie di esperienze fu eseguita nell'estate del 1908 sopra poche piante, e nell'anno successivo si fece una seconda serie ripetendo le prove colla piridina, su più larga scala.

Prima serie.

Le prove di questa serie si fecero inoculando nella datura la piridina, la piperidina e l'acido carbopirrolico.

Piridina. — Si prescelsero tre piante, alle quali venne inoculata la sostanza libera nei giorni 4, 18 agosto e 2 settembre, nella quantità totale

di 12 grammi. Le piante vennero prese in esame il 15 settembre e pesavano, in totale, kg. 4.

Per conoscere il peso totale degli alcaloidi in esse contenuti, venne preparato un estratto con acido solforico diluito; il liquido concentrato fu trattato con potassa in eccesso, quindi estratto con etere il quale, dopo l'estrazione, fu dibattuto con acido cloridrico diluito. Il liquido alcalino residuo dell'estrazione eterea fu poi sottoposto alla distillazione in corrente di vapore, raccogliendo il distillato su acido cloridrico. Le due soluzioni acide furono riunite, svaporate a secco, ed il residuo seccato in stufa a 100°-110°. Si ottennero gr. 3,8 di cloridrati, corrispondenti a 0,45 per mille di piante.

Per vedere se fra gli alcaloidi della datura si trovassero delle basi volatili, abbiamo rimesso in libertà le basi con potassa, estratto con etere e distillato con vapore l'estratto etereo. Il distillato, saturato con acido cloridrico e svaporato a secco, pesava gr. 0,60. Sciolto questo residuo in poca acqua, si ottenne, per trattamento con cloruro d'oro, un precipitato che, cristallizzato dall'acido coloridrico diluito, si presentò in forma di spine di pesce miste a piccola quantità di una sostanza che si separava oleosa (forse cloroaurato di atropina). La quantità però non fu tale da permettere una ulteriore purificazione; questi cristalli vennero messi da parte per poterli poi riunire a quelli provenienti dalle lavorazioni successive.

Risultò tuttavia da questa prova l'assenza della piridina, il cui cloroaurato, per la sua poca solubilità, è facilmente riconoscibile anche in piccole dosi.

Piperidina. — Le inoculazioni furono eseguite col tartarato della base in tre piante nei giorni 8, 19 agosto e 2 settembre. La quantità totale di sostanza introdotta fu di gr. 21. Le piante si raccolsero il 15 settembre e pesavano, complessivamente, kg. 8 Col metodo già descritto, vennero estratti gli alcaloidi e separate le basi volatili. I cloridrati dei primi pesavano gr. 5,2, pari al 0,65 per mille di piante; quelli delle seconde, gr. 1,28. Questi diedero col cloruro d'oro, dei cristalli simili ai precedenti, ma in quantità troppo piccola per rendere possibile la purificazione.

Non possiamo dire con certezza se fra le basi distillate col vapore si trovasse un poco della sostanza inoculata; senza dubbio, però, la massima parte di essa era scomparsa.

Acido carbopirrolico. — Si adoperarono cinque piante, che furono inoculate col sale sodico nei giorni 12, 18 agosto e 2 settembre, nella quantità totale di gr. 30. Col solito procedimento si ottennero gr. 6,4 di cloridrati, corrispondenti al 0,70 per mille di piante, e gr. 0,94 di cloridrati delle basi volatili che fornirono un cloroaurato simile ai precedenti.

Testimoni. — Per la prova di confronto si prescelsero tre piante che vennero raccolte lo stesso 15 settembre. Il loro peso complessivo era di kg. 4,5. Da esse si ottennero gr. 2,6 di cloridrati, corrispondenti al 0,58

per mille di piante, e gr. 0,35 di cloridrati delle basi volatili. Questi, trattati con cloruro d'oro, diedero cristalli simili a quelli ottenuti, in modo analogo, dalle precedenti esperienze; perciò vennero tutti riuniti e cristallizzati dall'acido cloridrico diluito. Fondevano a 213°-214°, e la determinazione dell'oro diede risultati corrispondenti al cloroaurato di tropina.

Calcolato per $C_8H_{15}NO.HAuCl_4$	Trovato
41,09	41,18

Il cloroaurato di tropina fonde a 203°,5 secondo Ladenburg; a 212° secondo Schmidt [1].

Da questa prima serie di prove si vede che le sostanze inoculate scompaiono almeno per la massima parte e che, d'altro canto, la maggior quantità di alcaloidi fu trovata nelle piante trattate con piridina.

Seconda serie.

Per accertare meglio i fatti ora descritti, abbiamo eseguito, come già si disse, esperienze su più larga scala; e poichè i prodotti finali che si ottengono sono gli stessi, qualunque sia la sostanza inoculata, e d'altra parte il risultato più importante si ebbe con la piridina, così venne ripetuta soltanto la prova di inoculazione con questa base.

Le inoculazioni furono eseguite sopra 72 piante con tartarato di piridina che si somministrò nei giorni 24 luglio, 3, 12 e 23 agosto, nella quantità totale di circa gr. 600. Le piante furono raccolte il 3 settembre e pesavano kg. 238. Altre 72 piante, coltivate nelle stesse condizioni, ma senza alcun trattamento, avevano l'ufficio di testimonî. Furono anch'esse raccolte il 3 settembre, ed il loro peso complessivo era di kg. 208.

Le prime operazioni, data la mole del materiale, vennero eseguite nello stabilimento Campari a Sesto S. Giovanni di Monza. Alla Ditta Campari e al dott. Emilio Soncini, sotto la cui direzione furono con molta cura eseguite le estrazioni, esprimiamo i nostri più sentiti ringraziamenti.

L'estratto cloridrico concentrato delle piante, soprasaturato con potassa, venne estratto con etere, e gli alcaloidi trasformati in cloridrati. Questi furono da noi presi in esame.

Inoculate. — I cloridrati greggi, seccati nel vuoto a bagno salato bollente, pesavano gr. 104, pari al 0,44 per mille di piante. Soltanto 29 gr. però erano costituiti dai cloridrati delle basi organiche, essendo il rimanente cloruro ammonico. Fra gli alcaloidi volatili abbiamo riscontrato traccie di piridina e, come nelle esperienze preliminari, la tropina, il cui cloroaurato fonde a 212°-213°.

Calcolato per $C_8H_{15}NO.HAuCl_4$		Trovato
C	19,95	19,82
H	3,35	3,55

[1] Beilstein, 3ª edizione, vol. III, pag. 786; supplemento, vol. III, pag. 605.

Riteniamo per altro che la tropina non preesista nelle piante, ma che si sia liberata dall'atropina durante le manipolazioni ora descritte. Noi infatti abbiamo eseguito sull'atropina pura le stesse operazioni fatte sulle dature, ed abbiamo potuto stabilire che realmente si forma della tropina libera.

Il liquido alcalino, da cui furono estratti con etere gli alcaloidi, venne distillato a Sesto S. Giovanni col vapore acqueo. I cloridrati ottenuti dal distillato furono estratti con alcool, e l'estratto alcoolico dette gr. 6,5 di prodotto. Per trattamente con cloruro d'oro si ottennero dei cristalli a forma di bastoncini fondenti, con decomposizione, a 215°. Della probabile natura di questo corpo, che ottenemmo pure nella esperienza parallela colle piante testimoni, ci occuperemo a proposito di queste.

Testimoni. — I cloridrati dell'operazione eseguita a Sesto pesavano gr. 63,5, di cui soltanto gr. 15 erano da attribuirsi alle basi organiche ed il rimanente all'ammoniaca. Ciò conferma pienamente il risultato delle esperienze della prima serie, e cioè il forte aumento di alcaloidi determinato dalla piridina.

Anche dai testimonî si ebbero, dal liquido alcalino, per distillazione, delle basi volatili. I cloridrati, purificati dall'alcool, pesavano gr. 6. Con cloruro d'oro diedero cristalli simili a quelli corrispondenti, ottenuti dalle dature inoculate; perciò furono tutti riuniti e cristallizzati dall'acido cloridrico diluito. Si ottennero aghetti fondenti, con decomposizione, a 231°. Il cloroaurato venne trasformato in picrato, che è pochissimo solubile nell'alcool e nell'acqua e che col riscaldamento annerisce senza fondere. Le analisi di questi sali dettero numeri che si avvicinano a quelli dei corrispondenti sali della *tetrametilendiamina*. Noi abbiamo perciò preparato il cloroaurato ed il picrato di questa base, ed abbiamo osservato una certa corrispondenza con quelli preparati dalla base ottenuta dalla datura. Il cloroaurato di tetrametilendiamina fonde con decomposizione a 230° (1), ed il picrato annerisce del pari senza fondere. Ma le nostre esperienze non ci permettono di affermare con certezza che l'alcaloide in questione sia la tetrametilendiamina. Questa base potrebbe provenire dalla decomposizione delle proteine.

RICERCHE SUL TABACCO

Con questa pianta (var. kentucky) si eseguirono tre serie di esperienze: la prima e la seconda corrispondenti a quelle sulla datura adoperando le stesse sostanze; nella terza serie si inocularono nel tabacco l'asparagina, l'ammoniaca, la piridina e le sostanze non azotate, glucosio ed acido ftalico.

(1) Gli autori dànno il punto di fusione 210°: Beilstein, 3ª ediz., vol. I, pag. 1156.

Prima serie.

Le sostanze inoculate furono, come nella corrispondente serie di esperienze sulla datura, la piridina, la piperidina e l'acido carbopirrolico.

Piridina. — Si scelsero tre piante alle quali venne inoculata la piridina libera nei giorni 8, 19 e 30 agosto, nella quantità totale di gr. 12. Le piante vennero raccolte il giorno 8 settembre e pesavano, al momento della raccolta, complessivamente kg. 8. Per estrarre gli alcaloidi, le piante vennero esaurite con acido solforico: il liquido concentrato fu reso fortemente alcalino con soda ed estratto con etere: la soluzione eterea venne spogliata degli alcaloidi dibattendola con acido cloridrico. Il liquido alcalino residuo della estrazione eterea, venne distillato col vapore su acido cloridrico. Le due soluzioni cloridriche, riunite, furono svaporate a secco nel vuoto ed il residuo seccato a 100°-110°. I cloridrati ottenuti pesavano gr. 18, pari al 2,25 per mille di piante: estraendo con alcool assoluto a caldo per eliminare il cloruro ammonico, ne rimasero gr. 15. Le basi furono rimesse in libertà con potassa ed estratte con etere. Svaporato il solvente con precauzione, si ottenne, per distillazione frazionata, una prima frazione bollente fino a 110° ed una seconda fra 238° e 242° nella quantità di gr. 7,7. Questa ultima è costituita da nicotina, il cui punto di ebollizione è 246°,7 (corretto) (1).

Per identificare la parte più volatile, venne convertita in cloridrato e si trattò con cloruro d'oro. Si ottenne una piccola quantità di precipitato che, purificato, fondeva a 190° (cloroaurato di nicotina). Per concentrazione delle acque madri, si separarono dei cristalli a forma di grandi tavole, che nel vuoto sfiorivano e fondevano, deacquificate, a 151°-152°. Della natura di questo sale, tratteremo in seguito.

Risultò con certezza da questa esperienza che tra gli alcaloidi isolati dalle piante trattate con piridina, non si trova traccia di quest'ultima.

Piperidina. — Questa sostanza venne fornita a tre piante, allo stato di tartarato, negli stessi giorni dell'esperienza precedente e nella quantità totale di gr. 18. Le piante vennero prese in esame l'8 settembre e pesavano, complessivamente, kg. 8,5. Da esse, col metodo già descritto, si ottennero gr. 16 di cloridrati corrispondenti a 1,88 per mille di piante verdi. Le basi, messe in libertà e frazionate, diedero per distillazione una prima frazione fino a 110° ed una seconda bollente intorno a 240°, nella quantità di gr. 6 (nicotina). Dalla prima frazione si ottenne, anche questa volta, una piccola quantità di cloroaurato fondente a circa 190° ed i cristalli tabulari fondenti a 151°-152°. Non possiamo dire con certezza se fra gli alcaloidi più volatili vi fosse qualche poco di piperidina.

(1) Beilstein, 3ª edizione, vol. IV, pag. 855.

Acido carbopirrolico. — Fu somministrato allo stato di carbopirrolato sodico. Si operò sopra cinque piante inoculando il sale nei giorni 12, 18 e 30 agosto, nella quantità di gr. 30. Furono raccolte l'8 settembre, e pesavano kg. 9. Esse fornirono gr. 12,8 di cloridrati, corrispondenti a 1,42 per mille di piante. Messe le basi in libertà, si ottennero, per distillazione frazionata, le due solite porzioni. La prima diede i cloroaurati fondenti rispettivamente a 190° e 151°-152°; la seconda era costituita da nicotina (gr. 5,5).

Testimoni. — Abbiamo prescelto, per il confronto, tre piante che non subirono alcun trattamento. Furono anch'esse raccolte l'8 settembre e pesavano kg. 8,1, Esse fornirono gr. 14,6 di cloridrati corrispondenti a 1,80 per mille di piante. Dalle basi più volatili si ottennero anche qui gli stessi cloroaurati fondenti a 190° e 151°.

Da questa serie di esperienze sul tabacco, risulta, come dalla serie parallela sulla datura, che le sostanze inoculate scompaiono, almeno per la massima parte, mentre in tutti i casi si ritrovano le stesse basi, e che la maggior quantità di esse si ebbe dalle piante trattate con piridina.

Seconda serie.

Queste esperienze furono eseguite allo scopo di meglio accertare i fatti osservati nella prima serie, e, inoltre, di identificare la base più volatile ritrovata costantemente, il cui cloroaurato fonde a 151°. Anche qui furono ripetute soltanto le esperienze di inoculazione colla piridina che aveva dato, come nelle datura, il risultato più favorevole.

Le inoculazioni furono eseguite sopra 90 piante, con tartarato di piridina. La quantità totale impiegata fu di circa gr. 1100 somministrati nei giorni 3, 13, 24 agosto e 1° settembre. Le piante furono raccolte il 10 settembre, e pesavano kg. 236. Altre 90 piante che avevano l'ufficio di testimoni, furono pure raccolte il 10 settembre e pesavano kg. 265.

Allo stabilimento Campari le piante furono estratte con acido cloridrico; l'estratto, concentrato nel vuoto, venne soprasaturato con potassa, distillato col vapore su acido cloridrico, ed il liquido raccolto, concentrato a piccolo volume. A questo punto abbiamo ripreso noi la lavorazione.

Inoculate. — Una parte aliquota ($^1/_{50}$) dell'estratto cloridrico, convenientemente purificato e separato coll'alcool dal cloruro ammonico, servì per il dosamento dei cloridrati degli alcaloidi. Se ne ottennero gr. 10,5. In totale, dunque, le piante inoculate fornirono gr. 525 di cloridrati, che rappresentavano il 2,22 per mille di piante verdi.

Dal rimanente dell'estratto cloridrico furono messe in libertà le basi che vennero poi distillate frazionatamente. Si ottenne una frazione più volatile del peso di 14 gr., bollente fra 80° e 115°, e gr. 258 di nicotina. Poichè la parte più volatile aveva l'odore di piridina, questa fu dosata allo stato di cloroaurato. Da gr. 2, si ebbero 6 gr. di cloroaurato, corrispondenti ad

una quantità totale di 8 gr. di piridina, in confronto dei 1100 gr. di tartarato inoculato. Per concentrazione delle acque madri del cloroaurato di piridina, si ottenne, come sempre, il cloroaurato tabulare che, deacquificato, fondeva a 150°-151°.

Testimoni. — Anche in questo caso si dosarono dapprima i cloridrati totali degli alcaloidi, che risultarono nella quantità di gr. 380, corrispondenti a 1,43 per mille di piante.

Le basi, messe in libertà, diedero, per distillazione, una frazione più volatile, bollente fra 80° e 123°, e gr. 196 di nicotina.

Nella parte più volatile era contenuta, anche in questo caso, la base il cui cloroaurato fonde a 151°. Avendone avuto a disposizione una sufficiente quantità, abbiamo potuto analizzarlo. Seccato nel vuoto, esso ha la composizione corrispondente alla formula

$$C_5H_{13}N \,.\, HAuCl_4$$

	Calcolato	Trovato
C	14,05	14,13
H	3,27	3,37
Au	46,18	46,08

Siccome il cloroaurato cristallizza con acqua, questa fu determinata asciugando i cristalli fra carta bibula e disidratandoli poi nel vuoto. Dall'analisi risultò che il corpo in questione contiene una molecola di acqua di cristallizzazione.

Calcolato per $C_5H_{13}N.HAuCl_4.H_2O$		Trovato
H_2O	4,04	4,14

Abbiamo potuto accertare che la base in parola non è altro che l'*isoamilamina*, confrontandone il cloroaurato con quello di isoamilamina da noi espressamente preparato.

Questa serie di esperienze conferma quanto fu osservato nella prima, cioè che la piridina, mentre scompare quasi completamente dalle piante inoculate, determina un notevole aumento nella quantità totale di alcaloidi.

Terza serie.

I risultati finora ottenuti potevano far credere che la piridina avesse un'azione specifica nella sintesi degli alcaloidi. Era perciò necessario sperimentare il contegno di un maggior numero di sostanze azotate. Furono prescelte a tal fine l'asparagina e l'ammoniaca, e venne ripetuta l'esperienza colla piridina. In secondo luogo, siccome è noto che le materie zuccherine fanno aumentare l'acido cianidrico nelle piante cianogenetiche (1), appariva oppor-

(1) M. Treub, Annales du Jardin botanique de Buitenzorg, *13*, 1 (1896); ibid., 4, serie 2ª, 86 (1904). — C. Ravenna e A. Peli, Gazzetta chimica italiana *37*, 2, 586 (1907).

tuno sperimentare il comportamento di sostanze non azotate anche sul tabacco: abbiamo adoperato, a tal fine, il glucosio ed una sostanza aromatica del pari molto ossigenata, l'acido ftalico. Inoltre abbiamo ricercato se le ferite fatte nel fusto per introdurvi le sostanze potessero determinare variazioni nel contenuto in alcaloidi, come influiscono sul contenuto in acido cianidrico le lesioni in generale (1). Un ultimo fatto rimasto incerto, era se l'isoamilamina si trovasse fra gli alcaloidi del tabacco o se provenisse da altre sostanze durante la lavorazione in laboratorio. Per risolvere tutte queste questioni, abbiamo eseguito le esperienze che ora descriviamo.

Le prime operazioni, in causa della grande quantità di materiale in esame, furono eseguite allo Stabilimento Carlo Erba di Milano. Anche qui sentiamo l'obbligo di esprimere alla Ditta Erba, al suo procuratore dott. Giovanni Morselli ed al dott. Raffaele Pajetta la nostra viva riconoscenza. Le piante di tabacco vennero esaurite con acido cloridrico: e per evitare che durante la concentrazione l'acido danneggiasse i lambicchi di rame, l'estratto cloridrico fu neutralizzato con soda, poi acidificato con acido tartarico. Il liquido ottenuto potè così essere portato nel vuoto a piccolo volume, senza difficoltà. L'estratto concentrato ci venne spedito per l'ulteriore esame. Per ogni singola operazione si operò sopra 5 piante che vennero inoculate nei giorni 10, 20, 30 agosto e 9 settembre, e raccolte il 17. Per la prova riguardante l'isoamilamina fu preparato invece semplicemente l'estratto acquoso di 64 piante, che, dopo concentrazione, ci fu inviato in laboratorio.

Asparagina. — La quantità totale di sostanza inoculata fu di gr. 29; al momento della raccolta le piante pesavano kg. 15,3. Per conoscere la quantità totale delle basi contenute nell'estratto tartarico giuntoci da Milano, lo abbiamo reso fortemente alcalino con potassa e distillato in corrente di vapore su acido cloridrico; il liquido raccolto fu svaporato nel vuoto, e dal residuo secco si eliminarono coll'alcool i sali ammoniacali. L'estratto alcoolico, seccato a 100°, pesava gr. 38,2, corrispondenti al 2,50 per mille di piante.

Piridina. — Si inocularono, in totale, gr. 60 di tartarato della base. Le piante, al momento della raccolta, pesavano kg. 17,1. Con processo simile ai precedenti si ottennero gr. 31,0 di cloridrati, corrispondenti a 1,81 per mille di piante.

Ammoniaca. — Anche questa sostanza fu somministrata allo stato di tartarato, nella quantità di gr. 36. Dalle 5 piante, che pesavano kg. 15,2, si ottennero gr. 29,4 di cloridrati, corrispondenti a 1,93 per mille.

Glucosio. — Furono inoculati gr. 40 della sostanza. Le piante pesavano kg. 16,0 e fornirono gr. 34,5 di cloridrati, pari a 2,15 per mille.

Acido ftalico. — Fu inoculato allo stato di ftalato potassico; dalle piante in esame, del peso di kg. 13,1, si ottennero gr. 20 di cloridrati, pari a 1,52 per mille.

(1) C. Ravenna e M. Zamorani: Le stazioni sperimentali agrarie italiane, *42*, 389 (1909).

Piante lesionate. — Per studiare l'effetto delle lesioni, nel fusto di 5 piante di tabacco venne praticata un'apertura simile a quella nella quale venivano introdotte le sostanze in esame. In questo caso, peraltro, l'apertura si richiudeva senz'altro, fissando le parti di corteccia staccate, con paraffina. Da queste piante, del peso di kg. 17,9. si ottennero gr. 34,0 di cloridrati, vale a dire 1,90 per mille.

Testimoni. — Furono prescelte 5 piante che non subirono alcun trattamento. Pesavano kg. 15,4 e dettero gr. 23 di cloridrati, corrispondenti a 1,49 per mille.

L'isoamilamina.

Questa sostanza sta senza dubbio in relazione colla leucina, da cui può prendere origine per eliminazione di anidride carbonica. L'isoamilamina si forma infatti per distillazione a secco, con potassa, della leucina e di alcune sostanze proteiche, come la materia cornea (1). Appariva quindi possibile che nelle nostre ricerche questa base prendesse origine o da leucina presente nelle piante o da qualche materia proteica. Perciò noi abbiamo voluto sottoporre al trattamento da noi seguìto per l'estrazione degli alcaloidi del tabacco, un vegetale contenente notoriamente molta leucina (le piantine germinanti di veccia), poi la materia cornea e finalmente la leucina stessa. Ma da nessuno di questi materiali si ottenne isoamilamina.

Per risolvere in modo definitivo la questione, ci sembrò tuttavia necessario eseguire sopra il tabacco stesso alcune esperienze in modo da evitare l'azione degli acidi e delle basi forti. Abbiamo operato, come si disse, sopra 64 piante (Kg. 147), di cui fu preparato l'estratto acquoso. Una parte aliquota di esso ($\frac{1}{5}$) fu evaporata a secco nel vuoto, il residuo trattato con alcool, e l'estratto alcoolico, sciolto in acqua, fu distillato col vapore, in presenza di un eccesso di idrato di magnesio, su acido cloridrico. Dai cloroidrati ottenuti si misero in libertà le basi che vennero distillate frazionatamente. Dalla parte più volatile (fino a 110°) si ottenne il *cloroaurato di isoamilamina*, cristallizzato nelle caratteristiche tavole che, deacquificate, fondevano a 151°.

Rimane così provato che l'isoamilamina da noi ritrovata costantemente in piccola quantità fra gli alcaloidi del tabacco, non proviene nè dalle sostanze proteiche, nè dalla leucina. Non possiamo però affermare se questa base si trovi nelle piante allo stato di sale o in forma di qualche suo derivato facilmente scindibile anche dalla magnesia.

Riassunto.

I risultati delle esperienze ora descritte sono riuniti nel seguente quadro. Siccome ogni serie di prove fu eseguita in differenti condizioni di tempo e

(1) H. Limpricht, Annalen der Chemie und Pharmacie, 101, 296 (1857).

di coltura, i risultati delle diverse serie non sono rigorosamente comparabili tra di loro. I numeri che si riferiscono alla terza serie sul tabacco, sono invece strettamente comparabili, anche perchè le quantità di sostanze azotate inoculate si equivalgono rispetto all'azoto.

Esperienze sulla datura.

Serie	TRATTAMENTO	Numero delle piante	Peso	Cloridrati col cloruro ammonico	Cloridrati liberati dal cloruro ammonico
			Kg.	Gr.	Gr.
1ª	Piridina	3	4,0	3,8 pari a 0,95 °/₀₀	—
»	Piperidina . . .	3	8,0	5,2 » 0,65 »	—
»	Carbopirrolato . .	5	9,0	6,4 » 0,71 »	—
»	Testimoni	3	4,5	2,6 » 0,58 »	—
2ª	Piridina	72	238	104,0 » 0,44 »	29,0 pari a 0,12 °/₀₀
»	Testimoni	72	208	63,5 » 0,30 »	15,0 » 0,07 »

Esperienze sul tabacco.

Serie	TRATTAMENTO	Numero delle piante	Peso	Cloridrati col cloruro ammonico	Cloridrati liberati dal cloruro ammonico	Nicotina
			Kg.	Gr.	Gr.	Gr.
1ª	Piridina . . .	3	8,0	18,0 pari a 2,25 °/₀₀	15,0 pari a 1,87 °/₀₀	6,0 pari a 0,96 °/₀₀
»	Piperidina . .	3	8,5	16,0 » 1,88 »	—	7,7 » 0,71 »
»	Carbopirrolato .	5	9,0	12,8 » 1,42 »	—	5,5 » 0,61 »
»	Testimoni . .	3	8,1	11,6 » 1,80 »	11,2 » 1,38 »	5,0 » 0,62 »
2ª	Piridina . . .	90	236	1200 » 5,10 »	513 » 2,17 »	258 » 1,10 »
»	Testimoni . .	90	265	812 » 3,10 »	380 » 1,43 »	196 » 0,74 »
3ª	Asparagina . .	5	15,3	—	38,2 » 2,50 »	—
»	Piridina . . .	5	17,1	—	31,0 » 1,81 »	—
»	Ammoniaca . .	5	15,2	—	29,4 » 1,93 »	—
»	Glucosio . . .	5	16,0	—	34,5 » 2,15 »	—
»	Acido ftalico .	5	13,1	—	20,0 » 1,52 »	—
»	Lesionate . .	5	17,9	—	34,0 » 1,90 »	—
»	Testimoni . .	5	15,4	—	23,0 » 1,49 »	—

Dal precedente quadro risulta che la piridina non ha un'influenza specifica sull'aumento degli alcaloidi: nel tabacco, l'ammoniaca produce lo stesso effetto. Più rimarchevole è l'influenza dell'asparagina la quale, nelle nostre esperienze, ha determinato la maggiore quantità di alcaloidi. Anche la lesione produsse l'effetto di far aumentare la nicotina; e perciò non è improbabile che, in genere, un trauma accresca il contenuto in alcaloidi nelle piante

alcaloidiche, come fa aumentare l'acido cianidrico nelle piante cianogenetiche. Anche il glucosio determinò un forte aumento di nicotina; perciò, anche da questo lato, le esperienze relative alla formazione dell'acido prussico diventano comparabili colle attuali. Infine è rimarchevole che la inoculazione dell'acido ftalico abbia condotto al minor per mille di alcaloidi, tanto da differire di poco da quello delle piante testimoni. Tenendo conto dell'influenza della lesione, se si può il suo effetto ritenere costante in tutti i casi da noi studiati, si potrebbe addirittura dedurre che l'acido ftalico ha fatto diminuire la quantità di nicotina. Sarà perciò utile continuare lo studio dell'influenza che esercitano le sostanze aromatiche sulle piante alcaloidiche.

Conclusioni.

Le osservazioni raccolte in questa Nota non permettono di trarre conclusioni sufficientemente sicure, relative alla genesi ed al significato degli alcaloidi nelle piante. Ci sembra, però, che le nostre esperienze parlino piuttosto in favore di quelle vedute che considerano gli alcaloidi vegetali come provenienti dagli acidi amidati. In appoggio di questa tesi, oltre al contegno della asparagina nel tabacco, ci sembra che possa essere interpretato il fatto della presenza da noi riscontrata dell'isoamilamina e si potrebbe supporre, come fa il Winterstein nella sua interessante monografia sugli alcaloidi (1), che basi provenienti da acidi amidati, quali la lisina e l'ornitina, vengano utilizzate dalle piante nella formazione degli alcaloidi.

Ci è grato infine esprimere i nostri sentiti ringraziamenti al dott. Vincenzo Babini per l'efficacissimo aiuto che ci prestò in queste esperienze.

Chimica. — *Azioni chimiche della luce.* Nota XVIII del Socio G. Ciamician e di P. Silber.

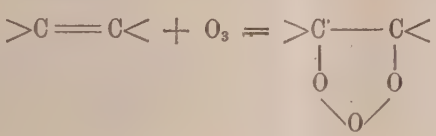
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

(1) E. Winterstein e G. Trier, Die Alkaloide, Berlin, 1910.

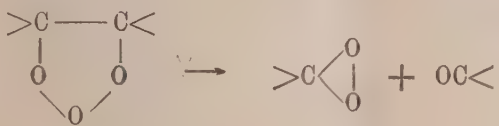
Chimica. — *Relazioni fra alcuni derivati dell'ossigeno e dell'azoto.* Nota del Corrisp. A. Angeli.

Le considerazioni che formano argomento della presente Nota, si possono riguardare come un seguito a quelle contenute nella mia comunicazione fatta lo scorso anno a questa Accademia: *Sopra alcune analogie fra derivati dell'ossigeno e dell'azoto* (1), ed ebbero origine dalla lettura degli interessantissimi lavori che C. Harries ha pubblicati sull'azione dell'ozono sopra le sostanze organiche.

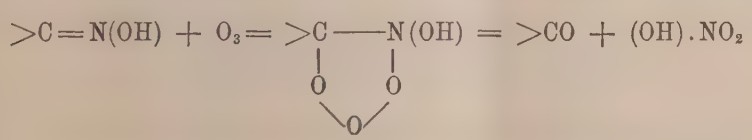
Come è noto, questo autore ha trovato che una molecola di ozono reagendo sopra un composto contenente un legame doppio o triplo fornisce prodotti che egli ha chiamati *ozonidi*:



i quali a loro volta sono suscettibili di subire svariate ed importanti trasformazioni, fra le quali è rimarchevole la scissione:

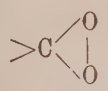


Nel corso dei suoi studî, Harries stesso ha trovato che l'ozono reagisce non solo sui legami multipli fra carbonio e carbonio, ma che un processo analogo, sebbene ancora non sia stato possibile isolare il corrispondente ozonide, con tutta probabilità si compie anche quando si tratti di legami multipli fra carbonio ed azoto (2); nel caso p. e. dell'ossima:



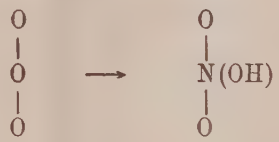
(1) Questi Rendiconti, vol. XIX, 2° sem., pag. 29.
(2) Liebig's Annalen, 343, pag. 323.

Queste reazioni, prescindendo da qualunque formula di struttura (1) si voglia attribuire a queste sostanze, dimostrano che in questi casi una molecola di ozono può perdere un atomo di ossigeno e che al suo posto è andato un atomo di carbonio, come nel caso della formazione dei perossidi:

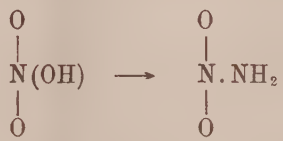


ovvero un atomo di azoto, come nel caso dell'acido nitrico dalle ossime (2):

Ne segue perciò che nella molecola dell'ozono un atomo di ossigeno è stato rimpiazzato dall'azoto; nei seguenti schemi si è tenuto solamente conto del modo con cui gli elementi probabilmente sono disposti, e non come sono riuniti:



Ora possiamo seguitare nel processo di sostituzione degli atomi di ossigeno; infatti, come ha dimostrato Thiele, dall'acido nitrico si può preparare la nitrammide:



(1) Taluni attribuiscono all'acqua ossigenata la struttura $O{=}O{=}H_2$; in modo analogo all'ozono si potrebbe assegnare l'altra $O{=}O{=}O$, all'acido azotidrico $N{\equiv}N{=}NH$ ed al diazometano $N{\equiv}N{=}CH_2$ che meglio spiegherebbero i processi di addizione di queste sostanze.

(2) Partendo p. e. da acetone, dapprima si prepara l'ossima che poi si tratta con ozono:

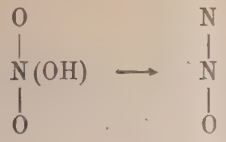
$$(CH_3)_2{:}CO + NH_2.OH = (CH_3)_2{:}CNOH + H_2O$$
$$(CH_3)_2{:}CNOH + O_3 = (CH_3)_2{:}CO + NO_3H$$

Il chetone quindi si rigenera, e sommando le due eguaglianze ne segue la relazione molto semplice:

$$NH_2.OH + O_3 = H_2O + NO_3H$$

che forse si potrà realizzare anche direttamente.

la quale perde facilmente una molecola di acqua per dare protossido di azoto; dunque:

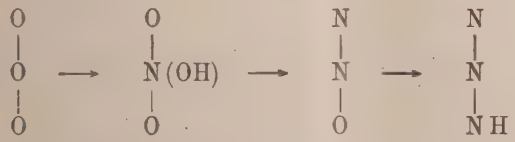


Finalmente il protossido di azoto per azione dell'ammoniaca (sotto forma di sodioammide, come ha trovato W. Wislicenus) scambia il suo atomo di ossigeno col residuo

$$>NH$$

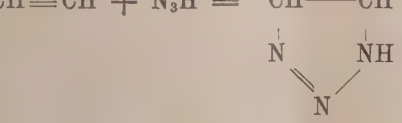
e così si arriva all'acido azotidrico:

Si vede quindi che per mezzo di queste trasformazioni è possibile di sostituire successivamente nella molecola dell'ozono ciascun atomo di ossigeno con un atomo di azoto:



ovvero anche, giovandosi delle formule solite:

In questo caso i due termini estremi, ozono ed acido azotidrico, presentano fra di loro maggiori analogie che non con gli intermedî; tutti e due infatti si formano con assorbimento di calore e da ciò il loro potere esplosivo; entrambi sono velenosi e di odore soffocante; entrambi reagiscono con i composti a legami multipli; il primo formando gli *ozonidi* a cui prima si è accennato, mentre l'acido azotidrico (ed i suoi eteri):



dà luogo alla formazione di *triazoli.*

Botanica. — *Riproduzione artificiale della Morìa dei castagni (Mal dell' Inchiostro)* (1). Nota del Socio G. Briosi e di R. Farneti.

In una Nota pubblicata nel luglio del 1907 (2) dimostrammo che il processo morboso che determina la così detta *Morìa dei castagni*, così nei cedui come nelle fustaie, non si inizia nelle estremità delle radici (ove sono le micorize) per procedere verso il tronco, ma segue la via inversa, cioè dal tronco scende alle radici; contrariamente a quanto si riteneva da tutti coloro, e sono molti, che si sono occupati di questa micidiale malattia dei castagni, che ha distrutto intere selve, tanto in Italia quanto in Francia, Spagna, Portogallo ecc.

In essa dimostrammo pure che nei cedui della Toscana la malattia si manifesta sui polloni con la produzione di un cancro che si presenta in forma di una depressione livida della corteccia nella parte attaccata, cancro prodotto dall'azione patogena di un fungo microscopico parassita, che noi descrivemmo sotto il nome di *Coryneum perniciosum* Briosi e Farneti.

In una seconda Nota pubblicata nel giugno 1909 (3), dimostrammo che detta *Morìa* presentava in Piemonte, in Liguria e nella Lunigiana, gli stessi caratteri osservati in Toscana, e che ivi pure era dovuta allo stesso parassita, il *Coryneum perniciosum* Briosi e Farneti; anzi, di questo parassita scoprimmo allora anche la forma picnidica (*Fusicoccum perniciosum* Briosi e Farneti) e la forma ascofora (*Melanconis perniciosa* Briosi e Farneti), e le descrivemmo.

Inoltre, in essa si dimostrò pure che ovunque l'andamento del male era identico e tanto negli alberi d'alto fusto, nei polloni dei cedui, salvo lievi differenze dovute al variare delle condizioni dell'ambiente, all'età del albero, allo spessore e allo stato esterno della corteccia della pianta, al vigore di questa e, specialmente, al punto in cui il ramo od il tronco viene attaccato.

Quando l'infezione comincia nei rami, la malattia si manifesta col precoce ingiallire delle foglie e col disseccamento dei rami attaccati, e ciò av-

(1) Il lavoro in esteso, corredato da disegni e fotografie, verrà pubblicato negli *Atti dell' Istituto Botanico* della R. Università di Pavia.

(2) Briosi e Farneti, *Sulla Morìa dei castagni* (*Mal dell'Inchiostro*). Prima Nota. Atti dell'Istituto Botanico della R. Università di Pavia, Ser. II, vol. XIII, Milano, 1907.

(3) Briosi e Farneti, *Intorno alla causa della Morìa dei castagni* (*Mal dell'inchiostro*) *ed ai mezzi per combatterla*. Atti dell'Istituto Botanico dell'Universisà di Pavia, Sez. II, vol. XIV, Milano, 1909.

viene senza ordine e senza causa apparente. Da principio, nel suo complesso, la pianta non sembra molto sofferente; ma, negli anni successivi, il male si estende, la pianta tutta intristisce e muore.

Sui rami, più o meno giovani, di un albero d'alto fusto, il male si può seguire come nei polloni di un ceduo, poichè il percorso dell'infezione lascia dietro di sè la caratteristica depressione livida della corteccia, cioè il cancro cosparso più o meno di pustole del parassita.

Quando il male colpisce direttamente il tronco o la ceppa, l'intero albero muore improvvisamente, come preso da apoplessia; senza che l'infezione lasci traccia di cancro sulla corteccia, generalmente grossa e coperta di ritidoma. Allora le foglie e i frutti seccano sui rami ai quali restano attaccati anche durante l'inverno.

Questo modo, non infrequente, di morire degli alberi è quello che più sconvolse le idee degli studiosi e diede luogo alle maggiori controversie, poichè non se ne sapeva trovare la giusta ragione.

Il male, in questi casi, si diffonde sotto il grosso ritidoma che lo nasconde all'occhio dell'osservatore; e soltanto quando il processo morboso ha molto progredito ed è riuscito a circuire il tronco o la ceppa o ad invadere le radici, si rende manifesto. La pianta, nulla di anormale rivela all'esterno; il parassita rimane nascosto sotto la corteccia, limitato più o meno intorno ai focolai d'infezione.

***

Che il *Male dell'inchiostro* fosse dovuto al parassitismo del *Coryneum perniciosum* e delle sue forme più evolute (*Fusicoccum* e *Melanconis*), per noi non vi era alcun dubbio; poichè centinaia di osservazioni fatte nelle selve di diverse regioni ci comprovavano quanto fin da principio avevamo intuito ed affermato.

Del resto, anche i signori Griffon e Maublanc, della Stazione di patologia di Parigi, che recentemente studiarono questa malattia nei cedui della Francia, hanno trovato le stesse cose da noi osservate, e confermato quanto noi avevamo pubblicato, come risulta dall'ultimo loro lavoro e come essi stessi in persona ne accertarono, in una cortese e gradita visita fattaci al nostro laboratorio in Pavia, nel mese scorso.

In tale occasione noi avemmo il piacere di mostrare ai chiarissimi scienziati francesi i nostri preparati, il materiale che ci aveva servito per lo studio; e potemmo loro dimostrare anche come il male che uccide gli alberi d'alto fusto (da loro non ancora studiato) fosse perfettamente identico a quello che fa morire i cedui.

Se noi non avevamo peraltro alcun dubbio sul parassitismo del *Coryneum perniciosum* e delle sue forme più evolute, e sul fatto che esso fosse la causa efficiente della *Morìa dei castagni* o *Mal dell'inchiostro*, ne mancava peraltro la prova sperimentale diretta, quella che può togliere a chiunque ogni dubbio

e che si ottiene solo con la riproduzione artificiale della malattia. A ciò ottenere, noi iniziammo esperienze sino da due anni or sono; ed ora finalmente esse hanno maturato i loro risultati, ed in modo così evidente che noi ne potemmo mostrare gli effetti chiari e sicuri, e confermanti in tutto la nostra opinione anche ai due esimii patologi francesi, in occasione della loro visita a Pavia.

Le esperienze cominciarono sulla fine della primavera del 1909 sopra un grosso albero di castagno d'oltre trent'anni d'età, nel pieno vigore e rigoglio di vegetazione, posto nel R. Orto Botanico di Pavia.

Era un albero posto nelle migliori condizioni, poichè isolato e in mezzo ad una vasta pianura, dove il castagno non è oggetto di speciale coltivazione, e che per di più trovasi a qualche centinaio di chilometri dai più vicini centri infetti.

Le prove furono ripetute nel 1910 sopra giovani pianticelle provenienti da un vivaio di Mariano Comense, trapiantate appositamente in altro angolo del nostro Orto Botanico; ma di queste diremo in altra occasione, essendosi in esse solo da poco iniziata la riproduzione del male.

Le prove di riproduzione furono fatte, come è naturale, col metodo della inoculazione diretta delle spore del parassita.

Nella primavera del 1909 noi stessi andammo a raccogliere corteccie malate nei cedui dei dintorni di Savona, da le quali traemmo i germi per le nostre inoculazioni.

In queste adoperammo spore tanto della forma conidica (*Coryneum perniciosum*) quanto della forma ascofora (*Melanconis perniciosa*), ricavate in parte direttamente dalle pustole delle piante malate, in parte ottenute da colture pure del parassita, da noi convenientemente preparate.

Avendo un solo albero a nostra disposizione, le diverse forme di spore vennero iniettate in settori distinti e ben limitati del suo tronco, a poco più di un metro dal suolo.

Per facilitare l'inoculazione, le spore furono poste in acqua distillata sterilizzata, poscia iniettate nel tessuto erbaceo della corteccia mediante una siringa di Pravaz.

Nelle aree del tronco prescelte per le inoculazioni asportammo da prima il ritidoma, mediante raschiatura e scarificazione col bistori, su qualche centimetro quadrato di superficie.

Per facilitare la penetrazione dell'ago della siringa e del liquido contenente le spore, si perforò, con un altro ago più resistente e più grosso o con la punta del bistori previamente sterilizzati, il tessuto erbaceo della corteccia, procurando di non intaccare il cambio e di non provocare sgorgo di linfa; e perchè il foro da infettare percorresse lunga porzione di tessuto, si tenne l'ago molto obliquo, procedendo, come è naturale, dall'alto al basso.

* * *

Un mese dopo praticata la inoculazione, cioè nell'agosto, incominciò la corteccia ad acquistare, intorno ai centri infettati artificialmente e nei limiti delle aree raschiate e anche un poco più sopra e più sotto, un colore bruno-rossastro che persiste tuttora.

Noi supponemmo che si fosse iniziato il processo d'infezione, ed ansiosi aspettammo la formazione netta del cancro ed il suo rapido sviluppo. Ma ciò non avvenne; le piccole macchie non progredirono, e noi rimanemmo col dubbio se esse fossero dovute alla formazione del trauma oppure all'azione del parassita inoculato.

Durante l'autunno e l'inverno, nulla si manifestò intorno alle aree infettate artificialmente, nè alcun disturbo venne fatto di notare nella vegetazione della pianta, la quale maturò perfettamente i suoi frutti, i quali caddero regolarmente insieme con le foglie ad autunno inoltrato.

Nella primavera del 1910 la pianta si rivestì di foglie, e la fioritura e l'allegamento dei frutti furono regolari. Solo si ebbe lo sviluppo di molte gemme avventizie alla base del troncò, fino a circa 60 centimetri dal suolo. Questo fenomeno denota nelle piante, in generale, una perturbazione nel corso ascendente della linfa; ma nel castagno, quantunque questo fatto sia stato anche dato quale sintomo della *Moria*, si osserva assai di frequente pure nei castagneti floridi e immuni.

Sul finire dell'estate dello anno scorso si ebbe un arrossamento generale e precoce delle foglie, e l'arresto dello sviluppo dei frutti; ma anche a questo fenomeno noi non demmo soverchia importanza, potendo essere prodotto da cause estranee alla *Moria*, come si verificò appunto l'anno scorso in molti castagneti dell'Emilia e della Toscana.

Nell'autunno ultimo le foglie non caddero come d'ordinario, ma rimasero attaccate ai rami insieme coi frutti immaturi e mummificati.

La persistenza anormale delle foglie e dei frutti è uno dei sintomi che, come si è detto, accompagna qualche volta il *Male dell'inchiostro*, e sul quale gli autori richiamarono più volte l'attenzione, poichè si manifesta in tal modo il caso più grave, e per molti inesplicabile, della malattia.

Un tale fenomeno, peraltro, non si può avere per esclusivo e caratteristico della *Moria*; esso in fondo denota solo la morte repentina, quasi fulminea, della chioma dell'albero: fenomeno che può avvenire per diverse cause.

La corteccia dei rami non presentava nulla di anormale, ad eccezione di un colore leggermente più scuro ma poco apprezzabile.

Fino a tutto il febbraio ultimo, nulla di nuovo; ma nel marzo inaspettatamente, sulla corteccia del tronco, nella regione ove si erano fatte le inoculazioni, è apparsa una abbondante eruzione di pustole speciali, che l'aspetto esterno e l'esame microscopico dimostrarono essere formate dagli stromi del

Corynеum perniciosum, i quali avevano sollevato e rotto la corteccia. E tale eruzione si estendeva da pochi centimetri sopra il suolo sino a metri 2,20 di altezza.

Il parassita da noi inoculato si è quindi riprodotto, e su larghissima scala, sporificando, fino ad ora, unicamente sotto la forma conidica.

La pianta presenta i sintomi caratteristici della *Moría* nella sua forma più grave, cioè in quella della apoplessia, poichè tutta la chioma dell'albero è morta e le foglie ed i frutti sono rimasti mummificati sui rami.

Esaminando attentamente l'albero, vedesi che il suo tronco è morto fin quasi a terra, e che il processo morboso sta ora discendendo rapidamente nelle radici.

Si può seguire il percorso e misurare anche con approssimazione la rapida corsa discendente dell'infezione, poichè da una delle parti del tronco la corteccia è morta fino quasi rasente il suolo, e morti sono i succhioni sopra di essa spuntativi l'anno scorso, mentre dalla parte opposta il processo mortifero è invece ora arrivato a circa 60 centimetri da terra, ma continua. I rimessiticci sviluppatisi sopra tale altezza sono pure tutti morti, mentre quelli sottostanti, formatisi l'anno scorso, veggonsi ancora vivi e rigogliosi, come viva mostrasi tuttora da questa parte l'ultima breve porzione sottoposta del pedale dell'albero.

Il male rapidamente discende anche su questo lato: infatti in pochi giorni ha raggiunto il livello dei germogli più alti, or ora spuntati, uccidendone quattro, uno dopo l'altro.

L'eruzione delle pustole del parassita ha determinato sul tronco, delle aree allungate nel senso dell'asse dell'albero, più o meno depresse, sufficientemente manifeste, specialmente all'estremità superiore, dove non confluiscono fra loro, ma terminano a punta ottusa.

Queste aree si estendono al disopra per circa m. 0,60 a 0,70, e per m. 1,20 ad 1,50 al disotto dei luoghi ove si erano fatte le inoculazioni.

Il micelio del parassita, in venti mesi, irradiando dai tre centri delle tre inoculazioni fatte, ha invaso dunque una superficie di circa 8000 centimetri quadrati, avanzandosi verso l'alto in ragione di tre centimetri al mese, discendendo verso la base del tronco con velocità doppia, e trasversalmente estendendosi in ciascun settore colla velocità di circa mezzo centimetro.

L'andamento e la diffusione dell'infezione artificiale nella pianta, quindi, segue lo stesso percorso e si avanza con la stessa rapidità delle infezioni naturali che abbiamo trovato nei castagni di Cadibona e nei cedui di Sella presso Savona, come dimostreremo nel lavoro definitivo.

***

In conclusione, siamo riusciti a riprodurre artificialmente la *Morìa dei* castagni (*Mal dell'inchiostro*) colla semplice inoculazione delle spore del *Co-*

ryneum perniciosum Briosi e Farneti e di quelle della forma ascofora dello stesso micete.

L'albero inoculato ed ucciso era perfettamente sano, in pieno rigoglio di vegetazione, posto a centinaia di chilometri dalle selve infette, quindi nelle condizioni più favorevoli per tali esperienze.

Anche in altre pianticelle giovani, artificialmente infettate, il male si sta riproducendo; ma di queste parleremo quando lo sviluppo della malattia sarà in esse più avanzato.

Il male si sviluppò attorno ai centri delle inoculazioni fatte sul tronco a poco più di un metro dal suolo, e da detti centri si irradiò in alto ed in basso (sino alle radici) invadendo parecchie migliaia di centimetri quadrati di corteccia e riproducendo perfettamente i cancri caratteristici che trovansi negli alberi delle selve naturalmente infette, con sopra riprodottevi a decine di migliaia le pustole del *Coryneum perniciosum*.

Considerato che le iniezioni sono state eseguite con tutte le necessarie precauzioni, non v'è alcun dubbio che al *Coryneum* e non ad altri agenti sia dovuta la riproduzione della malattia, perchè deve escludersi ogni altra causa predisponente o determinante, ed anche il minuscolo trauma prodotto dall'ago della siringa non ha potuto, di certo, in alcun modo influire.

Il male si è rivelato solo dopo lungo lasso di tempo, un anno e più, e si è manifestato riproducendovi la forma finora più misteriosa ed inesplicabile della malattia, quella della improvvisa apoplessia con tutti i suoi segni caratteristici, cioè precoce essiccamento delle foglie, mummificazione dei frutti che non si staccano dai rami, tardiva formazione degli organi riproduttori del parassita, ecc.

Il fatto di essere riusciti ad uccidere artificialmente, come abbiamo fatto noi, con semplici iniezioni di spore in alcuni limitatissimi punti del tronco un intero grosso albero sano, d'oltre 10 metri d'altezza in rigogliosa vegetazione (è forse il primo esempio di tal genere), prova quanto sia grande la potenza patogena di certi funghi parassiti; il che non è privo d'importanza altresì per la parassitologia generale, e dimostra anche come sia strana ed errata l'opinione di quella scuola di patologi che vorrebbe negare a questi microrganismi ogni diretta azione sulla produzione delle malattie delle piante.

Meccanica. — *Calcolo delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide sopra pareti rigide.* Nota I di Tommaso Boggio, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Nell' Idraulica, e specialmente nella teoria delle Turbine, è problema di alta importanza quello della determinazione delle azioni dinamiche esercitate da correnti fluide, in modo permanente, sopra pareti rigide.

Tale determinazione è effettuata nei trattati di Idraulica (1) e sulle Turbine (2), per alcuni casi particolari e con speciali artifizî che variano da caso a caso, e, quel che più importa rilevare, con ipotesi e procedimenti tutt'altro che rigorosi; spesso vi si ricorre alle equazioni delle quantità di moto, ma, come giustamente osserva il prof. Levi-Civita, a proposito di questioni analoghe (3) « il punto di vista è sempre particolare, e vi si trascura qualche cosa fin da principio ».

Orbene, facendo invece uso unicamente dei principî fondamentali della Idrodinamica razionale, si può con metodo uniforme, rigoroso, e quanto mai semplice, trattare in tutta la sua generalità la questione enunciata. Come caso particolare si ottengono formule che sono in perfetta armonia con quelle date negli accennati trattati.

È appunto ciò, che mi propongo di mostrare in questo lavoro, nel quale determino dapprima (Nota I) la risultante delle azioni dinamiche, e poi (Nota II) il momento risultante.

Nella trattazione mi valgo dei procedimenti dell'Analisi vettoriale (4), i quali si mostrano particolarmente adatti in tali ricerche, a causa della

(1) Masoni, *Corso di Idraulica*, 3ª ediz. Napoli, a. 1908; Flamant, *Hydraulique*, 3e édit. Paris, a. 1909.

(2) Zeuner, *Théorie des Turbines*, traduite de l'allemand par E. Kreitmann, Paris, a. 1905; Pfarr, *Die Turbinen für Wasserkraftbetrieb*, Berlin, a. 1907.

(3) Levi-Civita, *Sulla contrazione delle vene liquide*. Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIV, a. 1904-05.

(4) Cfr. Burali-Forti e Marcolongo, *Eléments de calcul vectoriel*, Paris, a. 1910; *Omografie vettoriali* ecc. Torino, a. 1909. In un breve articolo, pubblicato nel n. 61 della Revue du Mois (10 janvier 1911, pag. 112), il sig. J. Drach dà notizia degli *Eléments de calcul vectoriel* ora citati, ma, a proposito del calcolo vettoriale in genere, dice tali ... amenità, che è naturale il domandarsi se egli abbia proprio capito lo spirito, la sostanza e l'oggetto di detto calcolo. Per conto mio poi desidererei assai che il sig. Drach mi dicesse come si fa, col calcolo abbreviato di Bobillier e cogli invarianti, non a scrivere soltanto i risultati finali da me stabiliti in questo lavoro, ma ad ottenerli in modo altrettanto chiaro e breve, pur avendo sviluppato tutti i calcoli.

estrema semplicità e chiarezza che conferiscono alle formule che si debbono maneggiare.

1. *Formule preliminari.* — Indichiamo con S lo spazio limitato da una superficie chiusa σ, e con $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ due vettori funzioni regolari dei punti P dello spazio S. Si ha allora la formula (1):

$$(1) \qquad \int_S \frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u}\,d\mathrm{S} = -\int_\sigma (\mathbf{u}\times\mathbf{N})\,\mathbf{v}\,d\sigma - \int_S \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}\,d\mathrm{S},$$

ove $\mathbf{N}$ indica un vettore unitario, normale a σ, e diretto all'interno di S.

Oltre le dimostrazioni di questa formula, indicate nella mia Nota citata, si può pure dare la seguente, assai semplice. Si ha (2):

$$\mathrm{grad}\,\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u} + \mathbf{v}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u},$$

quindi, integrando ambi i membri nello spazio S, e trasformando poi il primo membro in un integrale esteso a σ, risulta:

$$\int_S \mathrm{grad}\,\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})\,d\mathrm{S} = -\int_\sigma \mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})\,\mathbf{N}\,d\sigma = -\int_\sigma (\mathbf{u}\times\mathbf{N})\,\mathbf{v}\,d\sigma,$$

perciò ne segue la (1).

La (1), che è una generalizzazione del lemma di Green, è molto importante per l'Idrodinamica. Nel caso particolare in cui $\mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathrm{grad}\,\varphi$, essa è stata data dal prof. Levi-Civita, il quale l'ha utilmente adoperata nella sua Nota già citata. Le equazioni cartesiane, equivalenti alla (1), sono state assegnate e adoperate recentemente dal prof. Cisotti, per stabilire il paradosso di d'Alembert (3); tale forma cartesiana è però alquanto complicata: e poco dopo io ho fatto vedere (nella mia citata Nota dell'Istituto Veneto) come, per mezzo della (1), si potessero molto semplificare i calcoli.

Ricordiamo ancora che se una massa fluida, di densità ϱ, è animata da moto *stazionario*, il vettore $\mathbf{v}$, velocità di ogni particella fluida P, deve soddisfare all'equazione di continuità:

$$(2) \qquad \mathrm{div}\,(\varrho\mathbf{v}) = 0,$$

(1) Boggio, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIX, a. 1909-910.

(2) Boggio, *Sul gradiente di una omografia vettoriale.* Rendiconti di questa Accademia, serie 5ª, vol. XIX, 2° sem. 1910.

(3) Cisotti, *Sul moto permanente di un solido in un fluido indefinito.* Atti del R. Istituto Veneto, t. LXIX, a. 1909-910.

e all'equazione fondamentale del moto, che, sotto la forma di Eulero, e in assenza di forze di massa, si scrive (1):

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{v} = -\frac{1}{\varrho}\,\mathrm{grad}\,p, \tag{3}$$

ove p è l'intensità della pressione.

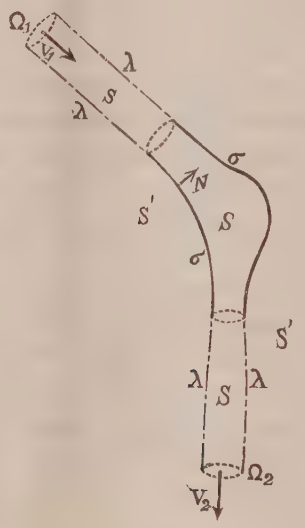


Fig. 1.

Moltiplicando scalarmente la (3) per $d\mathrm{P}$ (supposto che $d\mathrm{P}$ sia preso nella direzione del flusso), si deduce subito:

$$d\mathbf{v}^2 = -2\,\frac{dp}{\varrho},$$

od ancora:

$$\mathbf{v}^2 - \mathbf{v}_0^2 = -2\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{\varrho}, \tag{3'}$$

ove $\mathbf{v}_0$ è un vettore costante, e p_0 una quantità pure costante (sopra ciascun filetto fluido). Questa equazione non è altro che quella di Bernoulli.

Alle precedenti equazioni bisogna poi aggiungere l'equazione caratteristica del fluido, che, nel caso della temperatura costante, si può scrivere:

$$\varrho = f(p). \tag{4}$$

2. *Pressione nei tubi.* — Indichiamo con σ una superficie tubolare rigida, di forma qualunque, aperta alle due estremità; e supponiamo che il

(1) Boggio, *Dimostrazione assoluta delle equazioni classiche dell'Idrodinamica.* Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XLV, a. 1910.

suo interno sia occupato da una massa fluida in moto; più precisamente supponiamo che una corrente fluida (libera), proveniente dall'infinito, imbocchi il tubo (senza urti), e, dopo averlo attraversato, sbocchi formando così una vena, che si estende pure fino all'infinito.

Si suppone che il moto del fluido sia ovunque stazionario, e che non agiscano forze di massa; circa la natura del fluido non facciamo alcuna ipotesi, come pure non escludiamo che al finito possano esistere dei vortici; si sottintende però che il fluido sia perfetto (non viscoso) e a temperatura costante.

Chiamiamo Ω_1 la sezione normale asintotica (cioè a distanza infinita) della corrente a monte del moto, ed Ω_2 quella asintotica della vena a valle, e supponiamo inoltre che la velocità asintotica a monte $\mathbf{v}_1$ sia costante e normale alla sezione Ω_1, e così pure che la velocità asintotica a valle $\mathbf{v}_2$ sia costante e pure normale alla sezione Ω_2.

Indichiamo con λ le superficie libere, pure di forma tubolare, che limitano la regione occupata dal fluido, sia a monte che a valle del tubo σ.

Lo spazio S occupato dalla massa fluida è così limitato dal contorno $\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2$. Nella regione indefinita S', esterna ad S, regna la quiete, perciò in essa si avrà una pressione costante, che chiameremo p_0.

Indichiamo ora con $\mathbf{R}$ il vettore che rappresenta la risultante della azione dinamica esercitata dal fluido in moto sulla parete σ del tubo; esso è la differenza fra la risultante delle forze effettivamente esercitate sul tubo, e quella che si avrebbe *coeteris paribus* nel caso statico.

Si ha perciò:

$$\mathbf{R} = -\int_\sigma (p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\sigma.$$

Poichè le superficie λ sono libere, su esse $p = p_0$, onde si può scrivere:

$$\mathbf{R} = -\int_{\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2} (p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\sigma + \int_{\Omega_1} (p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} (p-p_0)\,\mathbf{N}\,d\Omega_2.$$

Trasformiamo il primo integrale col teorema del gradiente (1), ed osserviamo che siccome a distanza infinita il moto è uniforme, la pressione (come pure la densità) vi deve essere costante, e avremo così:

$$(5) \qquad \mathbf{R} = \int_S \operatorname{grad} p\, dS + (p_1-p_0)\,\Omega_1 \frac{\mathbf{V}_1}{V_1} - (p_2-p_0)\,\Omega_2 \frac{\mathbf{V}_2}{V_2},$$

ove p_1 e p_2 sono le pressioni asintotiche rispettivamente a monte e a valle, e V_1, V_2 sono le grandezze delle velocità $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$.

(1) Cfr. i già citati *Eléments de calcul vectoriel*, pag. 105.

Conviene intanto osservare che se, come in figura, il tubo σ non si estende indefinitamente, nella formula (5) spariscono gli ultimi due termini, perchè:

(6) $$p_1 = p_2 = p_0\,; \quad \text{inoltre} \quad \mathbf{v}_1^2 = \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_0^2\,;$$

se invece il tubo si estende indefinitamente soltanto a monte, si ha:

(6′) $$p_2 = p_0 \quad \text{ed} \quad \mathbf{v}_2^2 = \mathbf{v}_0^2\,,$$

perciò nella (5) sparisce solo l'ultimo termine; se poi il tubo si estende indefinitamente, sì a monte che a valle, non si presenta più alcuna riduzione nella (5).

Ciò premesso, trasformiamo, nella (5), l'integrale di $\operatorname{grad} p$. Dalla (3) risulta:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, d\mathrm{S} = -\int_S \frac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}} (\varrho \mathbf{v}) \, d\mathrm{S}\,,$$

perciò applicando la (1), e ricordando la (2):

$$\int_S \operatorname{grad} p \, d\mathrm{S} = \int_{\sigma+\lambda+\Omega_1+\Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \, \varrho \mathbf{v} \, d\sigma\,;$$

ma nei punti di $\sigma + \lambda$ la velocità è tangenziale, cioè $\mathbf{v} \times \mathbf{N} = 0$, per conseguenza:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, d\mathrm{S} = \int_{\Omega_1+\Omega_2} (\mathbf{v} \times \mathbf{N}) \, \varrho \mathbf{v} \, d\sigma = \varrho_1 \mathrm{V}_1 \, \Omega_1 \mathbf{v}_1 - \varrho_2 \mathrm{V}_2 \Omega_2 \mathbf{v}_2\,,$$

ove ϱ_1, ϱ_2 sono le densità asintotiche a monte e a valle. Anche qui conviene notare che se il tubo σ non si estende indefinitamente, insieme colle (6) si avrà, in virtù della (4): $\varrho_1 = \varrho_2$.

Se si osserva che, per il carattere permanente del moto, la *portata* Q attraverso la sezione Ω_1 deve essere eguale a quella attraverso la sezione Ω_2, si ha:

(7) $$\mathrm{Q} = \varrho_1 \mathrm{V}_1 \, \Omega_1 = \varrho_2 \mathrm{V}_2 \, \Omega_2\,,$$

perciò:

$$\int_S \operatorname{grad} p \, d\mathrm{S} = \mathrm{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\,;$$

sostituendo nella (5) avremo infine:

(8) $$\mathbf{R} = \mathrm{Q}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + (p_1 - p_0) \, \Omega_1 \frac{\mathbf{V}_1}{\mathrm{V}_1} - (p_2 - p_0) \, \Omega_2 \frac{\mathbf{V}_2}{\mathrm{V}_2}\,.$$

Questa formula mostra che il vettore R dipende solo da elementi asintotici del moto.

Poichè non abbiamo fatto alcuna ipotesi circa la forma del tubo σ al finito, la (8) vale naturalmente anche se il tubo presenta dei rigonfiamenti, i quali diano origine alla formazione di regioni ove il fluido è in riposo (regioni stagnanti).

Se il tubo σ si estende indefinitamente a monte e a valle, allora Ω_1, Ω_2 denotano le sezioni asintotiche del tubo.

3. *Casi particolari.* — Se il tubo σ non si estende indefinitamente, la (8) si riduce, in forza delle (6), ad

$$\mathbf{R} = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tag{8'}$$

e poi dalla (7) si conclude che le aree delle sezioni Ω_1, Ω_2 devono essere eguali.

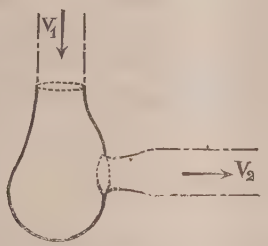


Fig. 2.

La (8') equivale alle formule stabilite, pel caso dei liquidi, dal Masoni (loc. cit., pag. 168) e dallo Zeuner (loc. cit., pag. 85) per i tubi ad asse piano; però le lettere hanno un significato un po' diverso, perchè mentre nella nostra (8') $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ sono le velocità asintotiche, nelle formule del Masoni e dello Zeuner indicano invece le velocità del fluido all'ingresso e alla uscita dal tubo, velocità che occorre supporre costanti, mentre, in generale, la velocità all'orifizio di uscita, varia da punto a punto.

L'orifizio di uscita del fluido può essere praticato sulla superficie laterale del tubo (invece che sul fondo), in guisa che la direzione di $\mathbf{v}_2$ risulti perpendicolare a quella di $\mathbf{v}_1$; allora la (8') porge per la componente R_2 di $\mathbf{R}$ secondo la direzione di $\mathbf{v}_2$ (reazione dinamica orizzontale):

$$R_2 = -QV_2 = -\varrho_2 \Omega_2 V_2^2. \tag{9}$$

Anche il Masoni (loc. cit., pag. 168) ottiene questa formula come caso particolare della (8'); però conviene avvertire che le ipotesi sotto le quali egli ottiene la (8') — fra le altre quella che il moto abbia luogo per sezioni piane — non sono affatto ammissibili per il caso particolare ora considerato.

La (9) è stata stabilita nell'ipotesi che non agiscano forze di massa; però, come ha già suggerito il prof. Levi-Civita nella sua Nota citata, essa

si può, con sufficiente approssimazione, applicare a problemi ove intervengono forze conservative, come accade ad es. per un liquido pesante, sostituendo però alla sezione asintotica Ω_2 della vena, la sezione contratta Ω', e alla velocità V_2 il valore $\sqrt{2gh}$, ove h è il carico sull'orifizio da cui sgorga la vena, e g è l'accelerazione della gravità. Si ha così dalla (9):

$$R_2 = -2\varrho_2 g\Omega' h .$$

Questa formula è in accordo con quella proposta dallo Zeuner (loco citato, pag. 97).

La (8′) sussiste pure se il fluido scorre in un canale, *a pelo libero*, cioè se il tubo σ presenta una spaccatura longitudinale (di larghezza arbitraria), che vada da un'estremità all'altra di esso; il tubo poi può anche estendersi indefinitamente tanto a monte che a valle [1].

Esaminiamo ora il caso in cui il tubo σ si estende indefinitamente a monte; allora nella (8) sparisce soltanto l'ultimo termine; se poi si tratta di un liquido omogeneo di densità ϱ (costante), dalle (3′), (6′) risulta:

$$\mathbf{v}_1^2 - \mathbf{v}_2^2 = -2\,\frac{p_1 - p_0}{\varrho} ,$$

perciò:

$$\mathbf{R} = Q(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \frac{\mathbf{v}_2^2 - \mathbf{v}_1^2}{2}\,\varrho\,\Omega_1\,\frac{\mathbf{V}_1}{V_1} ,$$

la quale, ricordando le (7), può ancora scriversi:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}\varrho\Omega_2 V_2^2\left[\left(\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1}\right)\frac{\mathbf{V}_1}{V_1} - 2\,\frac{\mathbf{V}_2}{V_2}\right] \quad (10)$$

[2].

perciò la reazione dinamica della vena liquida non dipende dalla forma del vaso nelle vicinanze dell'orifizio; ciò che si accorda con un'opinione correntemente accettata nella pratica.

Nel caso, particolarmente interessante, in cui l'orifizio è praticato sul fondo del vaso, in guisa che la direzione della vena sia la stessa di quella

[1] In questo caso particolare, e nell'ipotesi di moti in due dimensioni, la (8′) è pure stata stabilita recentemente dall'ing. Colonnetti nella Memoria: *Sul moto di un liquido in un canale*, in corso di stampa nei Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

[2] Nel caso particolare di moti in due dimensioni, la (10) è stata ottenuta dal prof. Cisotti nella Nota recentissima: *Sur la réaction dynamique d'un jet liquide* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 23 janvier 1911). Il procedimento del Cisotti (come pure quello adoperato dal Colonnetti nella Memoria sopra citata), analogo a quello esposto dal prof. Levi-Civita per il problema dei moti con scia, è fondato sulla teoria delle funzioni di variabile complessa, e sul teorema di Cauchy sui residui.

dell'asse del vaso, si ha $\mathbf{v}_1 : V_1 = \mathbf{v}_2 : V_2$, perciò dalla (10) si trae:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2} \varrho \Omega_2 V_2^2 \left[\frac{\Omega_1}{\Omega_2} + \frac{\Omega_2}{\Omega_1} - 2 \right] \frac{\mathbf{v}_1}{V_1},$$

vale a dire la reazione della vena liquida è interamente sopportata dal fondo del vaso. Se invece il vaso non si estendesse indefinitamente a monte, la (8') porgerebbe, nelle stesse ipotesi, $\mathbf{R} = 0$, il quale risultato è evidentemente paradossale.

Se poi l'orifizio è scolpito (fig. 2) su parete verticale, l'espressione che la (10) porge per la reazione dinamica orizzontale R_2, coincide colla (9).

Anche la (10) si può, come si è fatto per la (9), estendere al caso di liquidi pesanti.

Matematica. — *Sopra un nuovo operatore differenziale per le omografie vettoriali.* Nota di C. Burali-Forti, presentata dal Socio T. Levi-Civita.

Se α è omografia vettoriale ed $\mathbf{u}$ è vettore funzione del punto P variabile in un campo a tre dimensioni, è noto (*O. v.* [1], pag. 47, [7]) che

$$\frac{d(\alpha \mathbf{u})}{d\mathrm{P}} = \alpha \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + \lambda,$$

essendo λ l'omografia tale che, per $\mathbf{x}$ vettore arbitrario,

$$\lambda \mathbf{x} = \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}} \mathbf{x} \right) \mathbf{u}.$$

Per la rotazione del vettore $\alpha\mathbf{u}$ si ha dunque

$$\mathrm{rot}\,(\alpha \mathbf{u}) = 2\mathrm{V}\left(\alpha \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \right) + 2\mathrm{V}\lambda,$$

ma la $\mathrm{rot}(\alpha\mathbf{u})$ non può esser calcolata direttamente mediante α ed $\mathbf{u}$, sino a che non si sappia esprimere, pure mediante α ed $\mathbf{u}$, il vettore di λ.

Scopo di questa Nota è di dimostrare che il $\mathrm{V}\lambda$ si ottiene applicando ad $\mathbf{u}$ una omografia, funzione di α, della quale è possibile, e facile, il calcolo effettivo comunque sia data α (formule del n. 2). Tale omografia gode di

(1) C. Burali-Forti e R. Marcolongo, *Omografie vettoriali* ..... Torino, 1909, G. B. Petrini.

molte e notevoli proprietà che applichiamo alla risoluzione di alcune equazioni le quali, evidentemente, hanno notevole importanza in questioni di Fisica e di Meccanica. Le dimostrazioni sono semplicissime; ci risparmiamo, in generale, di citare nelle *O. v.* le regole note di calcolo omografico che applichiamo; però sviluppiamo completamente i calcoli necessarî per tali dimostrazioni.

1. In tutto ciò che segue: $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sono vettori funzioni del punto P che varia in un campo a tre dimensioni; $\mathbf{a}$ è vettore costante, arbitrario; $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ è terna unitaria-ortogonale-destrogira-costante di vettori; α, β sono omografie funzioni del punto P; m è numero pure funzione di P.

Con la notazione $\mathrm{Rot}\,\alpha$ indichiamo l'*omografia*, funzione di α, tale che comunque si fissi il vettore $\mathbf{u}$ si ha sempre

$$(1) \qquad (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right).$$

Occorre dimostrare che $\mathrm{Rot}\,\alpha$, *così definita dalla* (1), *è realmente una omografia vettoriale.*

Risulta subito dalla (1) che

$$(a) \qquad (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{u} + (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{v}$$

$$(b) \qquad (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,(m\mathbf{u}) = m\,\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) + \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha\mathbf{u} -$$
$$- 2\mathrm{V}\left\{m\alpha\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} + \alpha\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,m\,,\,\mathbf{u})\right\} = m\left\{\mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{u}) - 2\mathrm{V}\left(\alpha\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\right\} +$$
$$+ \mathrm{grad}\,m \wedge \alpha\mathbf{u} - 2\mathrm{VH}\,(\mathrm{grad}\,m\,,\,\alpha\mathbf{u}) = m\,(\mathrm{rot}\,\alpha)\,\mathbf{u}\,,$$

e le (a), (b) provano appunto che $\mathrm{Rot}\,\alpha$ è omografia.

È poi evidente che: Rot *è operatore che applicato ad una omografia produce una omografia*, e quindi, Rot *ammette qualsiasi potenza positiva.*

In particolare, ponendo nella (1), in luogo di $\mathbf{u}$, il vettore costante, arbitrario, $\mathbf{a}$ si ha

$$(2) \qquad (\mathrm{Rot}\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,(\alpha\mathbf{a})$$

il che giustifica la notazione $\mathrm{Rot}\,\alpha$ scelta per indicare l'omografia, funzione di α, definita dalla (1) [1].

Per le potenze di Rot si ha, per induzione,

$$(2') \qquad (\mathrm{Rot}^n\,\alpha)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}^n\,(\alpha\mathbf{a})\,.$$

[1] Non giustificherebbe però la notazione $\mathrm{rot}\,\alpha$, finchè rot rimane, nel significato usuale, operatore per i *vettori*, mentre il nuovo simbolo *deve essere* operatore per le *omografie*.

Introducendo la terna $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$

$$\text{(3)} \qquad \operatorname{Rot}\alpha = \mathbf{i} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \mathbf{j} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{j} + \mathbf{k} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{k},$$

perchè, per proprietà ben note,

$$(\operatorname{Rot}\alpha)\,\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = 2\mathrm{V}\frac{d(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}} = \mathbf{i} \wedge \frac{d(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \cdots = \left\{\mathbf{i} \wedge \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} + \cdots\right\}\mathbf{a}.$$

L'operatore Rot è distributivo rispetto alla somma,

$$\text{(4)} \qquad \operatorname{Rot}(\alpha + \beta) = \operatorname{Rot}\alpha + \operatorname{Rot}\beta$$

come risulta subito dalla (1) o dalla (2). Non è però commutativo col prodotto per un numero, e si ha

$$\text{(5)} \qquad \operatorname{Rot}(m\alpha) = m\operatorname{Rot}\alpha + \operatorname{grad} m \wedge \alpha \quad (^1),$$

perchè

$$\{\operatorname{Rot}(m\alpha)\}\,\mathbf{a} = \operatorname{rot}(m\alpha\mathbf{a}) = m\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) + \operatorname{grad} m \wedge \alpha\mathbf{a} =$$
$$= (m\operatorname{Rot}\alpha + \operatorname{grad} m \wedge \alpha)\,\mathbf{a}.$$

2. Per il calcolo effettivo dell'omografia $\operatorname{Rot}\alpha$ valgono le formule fondamentali seguenti:

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{Rot} m = \operatorname{grad} m \wedge \quad (^2)$$

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Rot}\mathbf{u} \wedge = \frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} - \operatorname{div}\mathbf{u} = -\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} \quad (^3)$$

(1) Se nella nota formula

$$\operatorname{rot}(m\mathbf{u}) = m\operatorname{rot}\mathbf{u} + \operatorname{grad} m \wedge \mathbf{u}$$

si cambia rot ed $\mathbf{u}$ in Rot ed α, si ottiene la (5).

Se nella formula, pure nota,

$$\mathrm{C}\alpha(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) = \mathbf{u} \wedge \mathrm{K}\alpha\,\mathbf{v} + (\mathrm{K}\alpha\mathbf{u}) \wedge \mathbf{v}$$

si cambia $\mathbf{v}$ in una omografia β, si ottiene una formula vera.

Da questi ed altri esempi non è lecito dedurre, imitando i moderni quaternianisti, che *omografia* e *vettore* sono una stessa cosa, e nemmeno, imitando quanto ha fatto il Gibbs per il ∇, dedurne che le omografie sono *vettori simbolici*.

(2) Dalle due formule

$$\operatorname{grad} m \times = \frac{dm}{d\mathrm{P}}, \quad \operatorname{grad} m \wedge = \operatorname{Rot} m$$

risulta che l'operatore $\frac{dm}{d\mathrm{P}}$, e il nuovo operatore $\operatorname{Rot} m$, dànno tutti gli operatori semplici che dipendono da $\operatorname{grad} m$.

Per l'operatore $\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}$, a 27 dimensioni, si hanno attualmente le due funzioni grad Rot che dipendono da $\alpha\mathbf{a}$

$$\operatorname{div}(\alpha\mathbf{a}) = \operatorname{grad}\mathrm{K}\alpha \times \mathbf{a}, \quad \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = (\operatorname{Rot}\alpha)\,\mathbf{a},$$

ma è certo che ne devono esistere altre e praticamente importanti.

(3) $\operatorname{Rot}\mathbf{u} \wedge$ significa $\operatorname{Rot}(\mathbf{u} \wedge)$ e non $(\operatorname{Rot}\mathbf{u}) \wedge$ che è privo di significato (ciò non avverrebbe se si fosse scritto, illogicamente, $\operatorname{rot}\alpha$ in luogo di $\operatorname{Rot}\alpha$).

$$(8) \qquad \mathrm{Rot}\,\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{v}) = \mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) - \mathbf{v}\wedge \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$$

$$(9) \qquad \mathrm{Rot}\,(\mathbf{u}\wedge\alpha) = \mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha\,,\mathbf{u}) - \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u} - \left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\alpha$$

$$(10) \qquad \mathrm{Rot}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} = \frac{d(\mathrm{rot}\,\mathbf{u})}{d\mathrm{P}}$$

$$(11) \qquad \mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} = 0\,.$$

Anche le dimostrazioni sono interessanti per la loro semplicità.

Dim. (6). $(\mathrm{Rot}\,m)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}(m\mathbf{a}) = \mathrm{grad}\,m\wedge\mathbf{a} = (\mathrm{grad}\,m\wedge)\,\mathbf{a}$

Dim. (7). $(\mathrm{Rot}\,\mathbf{u}\wedge)\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\wedge\mathbf{a}) = \left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}} - \mathrm{div}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{a}$

Dim. (8). $\{\mathrm{Rot}\,\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathbf{v})\}\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{v}) =$

$$= \mathbf{u}\times\mathbf{a}\,.\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v} + \mathrm{grad}\,(\mathbf{u}\times\mathbf{a})\wedge\mathbf{v}$$

$$= \mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathrm{rot}\,\mathbf{v})\,\mathbf{a} + \left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}\right)\wedge\mathbf{v} = \left\{\mathrm{H}(\mathbf{u}\,,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}) - \mathbf{v}\wedge\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right\}\mathbf{a}$$

Dim. (9). $\{\mathrm{Rot}\,(\mathbf{u}\wedge\alpha)\}\,\mathbf{a} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{u}\wedge\alpha\mathbf{a}) =$

$$= \left\{\mathrm{div}\,(\alpha\mathbf{a}) - \frac{d(\alpha\mathbf{a})}{d\mathrm{P}}\right\}\mathbf{u} - \left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\alpha\mathbf{a}$$

$$= \mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha\times\mathbf{a}\,.\,\mathbf{u} - \left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u}\right)\mathbf{a} - \left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\alpha\mathbf{a} =$$

$$= \left\{\mathrm{H}(\mathrm{grad}\,\mathrm{K}\alpha\,,\mathbf{u}) - \frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{u} - \left(\mathrm{C}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\alpha\right\}\mathbf{a}$$

Dim. (10). $\left(\mathrm{Rot}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{a} = \mathrm{rot}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}\right) = \frac{d\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}$

Dim. (11). $\left(\mathrm{Rot}\,\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{a} = \mathrm{rot}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a}\right) = \mathrm{rot}\left\{\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a} - \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\wedge\mathbf{a}\right\}$

$$= \frac{d\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\,\mathbf{a} + \left(\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} - \frac{d\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{a} = 0\,.$$

Si ha dalla (7) (Cfr. *O. v.*, pag. 58, [11])

$$\mathrm{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = (\mathrm{Rot}\,\mathbf{u}\wedge)\,\mathbf{v} - (\mathrm{Rot}\,\mathbf{v}\wedge)\,\mathbf{u}$$

e quindi Rot è l'operatore differenziale che dà a $\mathrm{rot}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ la stessa forma di

$$d(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v}) = (d\,\mathbf{u}\wedge)\,\mathbf{v} - (d\mathbf{v}\wedge)\,\mathbf{u}\,.$$

3. Per i prodotti degli operatori Rot , V , I_1 , K , grad , Δ, si hanno le formule notevoli:

$$\text{(12)} \qquad \text{Rot}^2\alpha = \text{K}\frac{d\,\text{grad K}\alpha}{d\text{P}} - \Delta\alpha$$

$$\text{(13)} \qquad 2\text{V Rot}\,\alpha = \text{grad C}\alpha$$

$$\text{(14)} \qquad \text{I}_1\,\text{Rot}\,\alpha = -\,2\,\text{div V}\alpha$$

$$\text{(15)} \qquad \text{K Rot}\,\alpha = \text{Rot}\,\alpha - (\text{grad C}\alpha)\wedge$$

$$\text{(16)} \qquad \text{Rot K}\alpha = \text{Rot}\,\alpha + 2\text{C}\frac{d\text{V}\alpha}{d\text{P}}$$

$$\text{(17)} \qquad \text{grad K Rot}\,\alpha = 0$$

$$\text{(18)} \qquad \text{grad Rot}\,\alpha = \text{rot grad}\,\alpha$$

$$\text{(19)} \qquad \text{Rot}\,\Delta\alpha = \Delta\,\text{Rot}\,\alpha = -\,\text{Rot}^3\alpha$$

$$\text{(20)} \qquad \text{V Rot K Rot}\,\alpha = -\,\text{grad div V}\alpha$$

$$\text{(21)} \qquad \text{Rot K Rot}(\text{V}\alpha\wedge) = (\text{V Rot K Rot}\,\alpha)\wedge\ ,\ \text{Rot K Rot D}\alpha = \text{D Rot K Rot}\,\alpha.$$

Dim. (12). $(\text{Rot}^2\alpha)\,\mathbf{a} = \text{rot}^2(\alpha\mathbf{a}) = \text{grad div}\,\alpha\mathbf{a} - \Delta'(\alpha\mathbf{a})$

$$= \text{grad}\,(\text{grad K}\alpha\times\mathbf{a}) - (\Delta\alpha)\,\mathbf{a} = \left\{\text{K}\frac{d\,\text{grad K}\alpha}{d\text{P}} - \Delta\alpha\right\}\mathbf{a}\,.$$

Dim. (13). Dalla (3) e mediante altre formule note (*O. c.*, pag. 19, [11]; pag. 52 (1) [10]; pag. 50, [2] si ha

$$2\text{V Rot}\,\alpha = \left\{\text{I}_1\left(\frac{d\alpha}{d\text{P}}\mathbf{i}\right) - \frac{d\alpha}{d\text{P}}\,\mathbf{i}\right\}\mathbf{i} + \cdots = \left\{\mathbf{i}\times\text{grad I}_1\alpha - \frac{'d\alpha}{d\text{P}}\,\mathbf{i}\right\}\mathbf{i} = \text{ecc.}\ (2).$$

(1) Per l'omografia $\frac{d\alpha}{d\text{P}}\mathbf{u}$ si ha

$$\text{I}_1\left(\frac{d\alpha}{d\text{P}}\mathbf{u}\right) = \mathbf{u}\times\text{grad I}_1\alpha\quad,\quad \text{V}\left(\frac{d\alpha}{d\text{P}}\mathbf{u}\right) = \frac{d\text{V}\alpha}{d\text{P}}\mathbf{u}\,;$$

la prima è nota; la seconda è evidente perchè d e V sono commutabili. Volendo dimostrarla con la terna $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ si presenta l'omografia

$$\mu = \mathbf{i}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{i})}{d\text{P}} + \mathbf{j}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{j})}{d\text{P}} + \mathbf{k}\wedge\frac{d(\alpha\mathbf{k})}{d\text{P}} = 2\,\frac{d\text{V}\alpha}{d\text{P}}$$

come si vede subito calcolando $\mu d\text{P}$. Ciò prova che μ, sebbene *simile* a Rot α, ne differisce profondamente.

(2) Oppure:

$$2\text{V Rot}\,\alpha\times\mathbf{a}\wedge\mathbf{b} = \mathbf{b}\times\text{rot}(\alpha\mathbf{a}) - \mathbf{a}\times\text{rot}(\alpha\mathbf{b}) =$$
$$= \text{div}\,(\mathbf{a}\wedge\alpha\mathbf{b} - \mathbf{b}\wedge\alpha\mathbf{a}) = \text{div}\,\{\text{KC}\alpha(\mathbf{a}\wedge\mathbf{b})\} = \text{grad C}\alpha\times\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}.$$

Dim. (14). $\mathrm{I}_1 \operatorname{Rot}\alpha = -2\mathbf{i}\times\mathrm{V}\left(\frac{d\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i}\right) - \cdots =$

$$= -2\mathbf{i}\times\frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}}\mathbf{i} - \cdots = -2\,\mathrm{I}_1\frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}}.$$

Dim. (16). $\operatorname{Rot}\mathrm{K}\alpha = \operatorname{Rot}(\alpha - 2\mathrm{V}\alpha\wedge) =$ ecc. (per la (7))

Dim. (17). $(\operatorname{grad}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha)\times\mathbf{a} = \operatorname{div}\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = 0$

Dim. (18). Dalla (15) e (17) si ha

$$\operatorname{grad}\operatorname{Rot}\alpha = \operatorname{grad}\{(\operatorname{grad}\mathrm{C}\alpha)\wedge\} = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\mathrm{C}\alpha = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\alpha$$

Dim. (19). Dalla (12) e (11) si ha subito la prima delle (19). Per la seconda:

$$(\triangle\operatorname{Rot}\alpha)\,\mathbf{a} = \triangle'\{\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a})\} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) - \operatorname{rot}^2(\alpha\mathbf{a}) = -(\operatorname{Rot}^2\alpha)\,\mathbf{a}.$$

Dim. (20). $2\mathrm{V}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha = \operatorname{grad}\mathrm{C}\,\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha =$

$$= \operatorname{grad}\mathrm{I}_1\operatorname{Rot}\alpha = -2\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha$$

Dim. (21). $\operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}(\mathrm{V}\alpha\wedge) = -\operatorname{Rot}\mathrm{K}\mathrm{C}\frac{d\mathrm{V}\alpha}{d\mathrm{P}} =$

$$= -\operatorname{Rot}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha = -(\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha)\wedge.$$

4. Si ha il corrispondente di un noto e fecondo teorema di Clebsch. *Se* α *è omog., funzione di* P, *si può, in infiniti modi, determinare l'omografia* β *e il vettore* $\mathbf{u}$, *funzioni di* P, *in guisa che*

$$(a) \qquad \alpha = \operatorname{Rot}\beta + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}.$$

Se $\mathbf{a}$ è vettore costante si ha (teorema di Clebsch)

$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathrm{v} + \operatorname{grad}m$$

con $\mathbf{v}$ vettore ed m numero funzioni di P e di $\mathbf{a}$; ma tali funzioni sono lineari rispetto ai vettori costanti $\mathbf{a}$ e quindi esiste l'omografia β e il vettore $\mathbf{u}$, funzioni di P soltanto, tali che per $\mathbf{a}$ vettore costante, arbitrario,

$$\mathbf{v} = \beta\mathbf{a} \quad , \quad m = \mathbf{u}\times\mathbf{a}.$$

La formula precedente diviene

$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot}(\beta\mathbf{a}) + \operatorname{grad}(\mathbf{u}\times\mathbf{a}) = \left(\operatorname{Rot}\beta + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\right)\mathbf{a}.$$

Segue che: *Ogni* Rot *è pure una* Rot^2. Cioè, in particolare: *L'equazione* $\operatorname{Rot}^2\xi = \operatorname{Rot}\alpha$ *ammette come soluzioni le omografie* β *che soddisfano alla* (*a*).

Operando con Rot nei due membri della (α) si ha $\operatorname{Rot}\alpha = \operatorname{Rot}^2\beta$. Viceversa sia $\operatorname{Rot}(\operatorname{Rot}\xi - \alpha) = \operatorname{Rot}\eta = 0$; dalle condizioni equivalenti

$$\operatorname{Rot}\eta = 0\ ,\ \operatorname{rot}(\eta\mathbf{a}) = 0\ ,\ \eta\mathbf{a} = -\operatorname{grad} m = -\operatorname{grad}(\mathbf{u}\times\mathbf{a}) = -\mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}\mathbf{a}$$

risulta $\operatorname{Rot}\xi = \alpha - \mathrm{K}\dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ che è la (α) per $\beta = \xi$.

5. *L'equazione* $\operatorname{grad}\xi = 0$ *ha come soluzione generale*

$$\xi = \mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha$$

con α *omog.* ARBITRARIA,

In virtù della (17), $\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha$ è soluzione della equazione. Viceversa: da $\operatorname{grad}\xi = 0$ e per $\mathbf{a}$ vettore costante si ha

$$\mathbf{a}\times\operatorname{grad}\xi = 0\ ,\ \operatorname{div}(\mathrm{K}\xi\mathbf{a}) = 0\ ,\ \mathrm{K}\xi\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{rot}(\alpha\mathbf{a}) = (\operatorname{Rot}\alpha)\mathbf{a}$$

che dà, appunto, $\mathrm{K}\xi = \operatorname{Rot}\alpha$, cioè $\xi = \mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha$ (1).

Il teorema seguente risolve in modo semplicissimo una questione già risolta da Maxwel, Morera, Beltrami, e prova immediatamente che le due soluzioni, di forma diversa, date da Morera e Beltrami, poi dal Morera dimostrate equivalenti, corrispondono al riferire $\mathrm{D}\alpha$ alle sue direzioni principali o a tre direzioni auto-polari (2).

L'equazione $\operatorname{grad}\mathrm{D}\xi = 0$ *ha come soluzione generale*

$$\mathrm{D}\xi = \operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{D}\alpha$$

essendo $\mathrm{D}\alpha$ *dilatazione* ARBITRARIA.

Per la (20), $\operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{D}\alpha$ è dilatazione; e poichè essa coincide con la sua coniugata, per la (17) è soluzione. Che è soluzione generale può anche vedersi osservando che essa ha *sei* dimensioni come $\mathrm{D}\alpha$; oppure così. Da $\operatorname{grad}\mathrm{D}\xi = 0$ segue $\mathrm{D}\xi = \mathrm{K}\operatorname{Rot}\beta$ con $\mathrm{V}\operatorname{Rot}\beta = 0$, cioè $\operatorname{grad}\mathrm{C}\beta = 0$, o ancora, $\mathrm{C}\beta = -\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha$; osservando che $\mathrm{I}_1\mathrm{C}\beta = 2\,\mathrm{I}_1\beta = 2\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha$, si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{D}\xi &= \mathrm{K}\operatorname{Rot}(\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha + \mathrm{I}_1\beta) = \mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha + \mathrm{K}\operatorname{Rot}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha\\ &= \mathrm{K}\operatorname{Rot}\mathrm{K}\operatorname{Rot}\alpha - (\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathrm{V}\alpha)\wedge\ ,\end{aligned}$$

che per le (20), (21) dà a $\mathrm{D}\xi$ la forma indicata.

(1) Dalla mia Nota: *Sull'operatore di Laplace per le omografie vettoriali* (Questi Rendic., v. XX, s. 5ª, 1911, pp. 10-16) e dalla (12) risulta subito (basta porre $\alpha = -\mathrm{K}\beta$), $\xi = \mathrm{K}\operatorname{Rot}^2\beta$; ma tale risultato concorda con quello ora trovato a causa dell'ultimo teorema del n. 4. Per l'equazione $\operatorname{grad}\xi = \mathbf{f}$ cfr. la Nota ora citata.

(2) Maxwell, Scientific Papers, vol. II, pag. 102; Morera, *Soluzione generale delle equazioni indefinite dell'equilibrio di un capo continuo*, Rend. Acc. Lincei. vol. I, ser. 5ª, 1892, pag. 137; Beltrami, *Osservazioni sulla Nota precedente*, pag. 141; Morera, *Appendice alla Nota: Soluzione* ecc., pag. 233.

6. *L'omografia* α *è una* Rot *solamente quando*

$$\operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = 0 .$$

Invero per $\mathbf{a}$ vettore costante arbitrario le condizioni

$$\operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = 0 \ , \ \mathbf{a} \times \operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = 0 \ , \ \operatorname{div}(\alpha\mathbf{a}) = 0 \ ,$$
$$\alpha\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{u} = \operatorname{rot}(\beta\mathbf{a}) = (\operatorname{Rot}\beta)\,\mathbf{a}$$

sono equivalenti.

L'equazione $\operatorname{Rot}\xi = \alpha$ *ammette soluzioni solamente quando* $\operatorname{grad} \mathrm{K}\alpha = 0$; *questa condizione essendo soddisfatta e posto (teorema precedente)* $\alpha = \operatorname{Rot}\beta$, *la soluzione generale è*

$$\xi = \beta + \mathrm{K}\frac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$$

con $\mathbf{u}$ *vettore* ARBITRARIO.

Risulta subito dal teorema precedente e dalla dimostrazione dell'ultimo teorema del n. 4.

7. *L'omografia* α *individua una* DEFORMAZIONE DI CORPO CONTINUO *(cioè* $\alpha d\mathrm{P}$ *è un differenziale esatto) solamente quando* $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$.

Dal n. 6 risulta che $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$ dà $\alpha = \dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$; viceversa $\alpha = \dfrac{d\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$ dà, per la (11), $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$.

Le *sei* relazioni di Saint-Venant per le componenti di una *deformazione pura* sono, dal teorema seguente, ridotte ad *una* sola.

Affinchè $\mathrm{D}\alpha$ *individui una* DEFORMAZIONE PURA DI CORPO CONTINUO *è necessario e sufficiente che*

$$(a) \qquad \operatorname{Rot} \mathrm{K} \operatorname{Rot} \mathrm{D}\alpha = 0 .$$

Se $\alpha d\mathrm{P} = d\mathbf{u}$, allora $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$ e poichè $2\mathrm{K}\alpha = 2\mathrm{D}\alpha - (\operatorname{rot}\mathbf{u}) \wedge$ si ha facilmente

$$(b) \qquad \operatorname{Rot} \mathrm{D}\alpha = \frac{1}{2}\frac{d \operatorname{rot}\mathbf{u}}{d\mathrm{P}}$$

che per la (11) dimostra essere (a) condizione *necessaria*. Se la (a) è vera, allora (n. 6) $\operatorname{Rot} \mathrm{D}\alpha = \dfrac{d\mathbf{v}}{d\mathrm{P}}$ che per la (b) determina $\operatorname{rot}\mathbf{u}$ in modo che $\operatorname{Rot} \mathrm{K}\alpha = 0$, cioè la condizione è *sufficiente*.

Meccanica. — *Sull'efflusso dei liquidi fra pareti che presentano una interruzione.* Nota I di GUSTAVO COLONNETTI, presentata dal Socio T. LEVI-CIVITA.

Nell'ultimo paragrafo di una mia recente Memoria (1) ho avuto occasione di rilevare che ogniqualvolta una parete rigida guidante un liquido in moto permanente, presenta verso il campo del moto una convessità con curvatura *sufficientemente pronunciata* o addirittura una cuspide, il fenomeno non può mantenersi ovunque continuo ed irrotazionale.

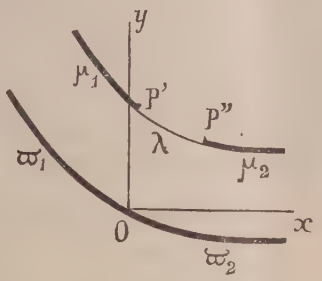


FIG. 1.

Lo studio dei moti liquidi caratterizzati da simili singolarità, tutt'altro che rare nella pratica (si pensi ad es. ai fenomeni che si verificano in prossimità dei gomiti ovvero dei cambiamenti bruschi di sezione nei tubi), presenta difficoltà analitiche gravissime.

In mancanza perciò di una soluzione completa del problema, sembra non privo di interesse notare come si possa pervenire ad assegnare l'integrale generale dei moti liquidi *permanenti, piani ed irrotazionali* (2) dotati di una discontinuità di dimensioni finite (3).

1. Un liquido, fluido incompressibile, non sollecitato da forze ed omogeneo (la cui densità costante prenderemo eguale all'unità), si muova con moto piano, continuo, permanente ed irrotazionale in una regione A (fig. 1)

(1) Colonnetti, *Sul moto di un liquido in un canale,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1911.

(2) Così ridotto il problema può essere studiato col valido sussidio della teoria delle funzioni di variabile complessa; Levi-Civita, *Scie e leggi di resistenza,* Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1907.

(3) Mi riservo di far vedere in altra mia prossima Nota in qual modo si possano, dalle considerazioni generali che sto per esporre, dedurre alcuni casi particolari, assai caratteristici. Più precisamente mi propongo di porre allora in evidenza in qual modo si possa procedere ad una razionale analisi delle discontinuità che caratterizzano quei casi di efflusso nei quali si verifica il fenomeno del Venturi: fenomeno le cui applicazioni nel campo della pratica tecnica sono ormai tanto note quanto numerose.

semplicemente connessa, ed estendentesi all'infinito sia a monte che a valle, limitata ovunque da contorni rigidi, epperò dati, salvo che lungo un certo tratto finito, là dove il liquido in moto confina a pelo libero con un'altra regione B occupata da un fluido in quiete a pressione costante.

Supporremo le pareti rigide tali che il liquido possa scorrere lungo di esse mantenendosi ad esse ovunque aderente senza che per ciò la pressione discenda in alcun punto al di sotto di un valore opportunamente scelto.

Ammesse le notazioni indicate in figura ed assunta l'origine O sulla parete rigida $\varpi_1 + \varpi_2$ nel modo che più innanzi verrà definito, si prenda la direzione assintotica del moto verso valle come direzione positiva delle x, e come direzione positiva delle y la normale a quella, uscente da O, e rivolta verso il campo A.

Pur lasciando, pel momento, indeterminata l'unità di velocità, indicheremo fin d'ora con V_1 e V_2 le grandezze delle velocità assintotiche rispettivamente a monte ed a valle del movimento.

Dette pertanto, al solito, u_P e v_P le componenti parallele ai due assi coordinati della velocità in un un punto P generico di A, riterremo che al tendere di P verso l'infinito *a valle* si abbia:

$$\lim u_P = V_2$$
$$\lim v_P = 0$$

mentre che al tendere di P verso l'infinito *a monte* sia:

$$\lim u_P = V_1 \cos \alpha$$
$$\lim v_P = V_1 \operatorname{sen} \alpha,$$

α essendo l'angolo che la direzione della velocità assintotica a monte forma colla direzione positiva dell'asse x, misurato fra π e $-\pi$, positivamente nel verso che porta la direzione positiva dell'asse x a coincidere colla direzione positiva di y.

Converremo infine che il valore assoluto della velocità

$$V = |\sqrt{u^2 + v^2}|$$

sia in ogni punto di A diverso da zero, contorni compresi, eccezione fatta soltanto per gli eventuali punti angolosi (necessariamente concavi) delle pareti rigide, nei quali la velocità si annulla.

2. Per le ipotesi fatte debbono notoriamente esistere due funzioni $\varphi(x, y)$ e $\psi(x, y)$, potenziale di velocità e funzione di corrente, armoniche e regolari in A, definite rispettivamente dalle equazioni differenziali

$$d\varphi = \quad u\,dx + v\,dy$$
$$d\psi = -v\,dx + u\,dy$$

colle determinazioni $\varphi = \psi = 0$ nell'origine O. L'arbitrarietà che ci siamo riservata nella scelta di quest'origine ci permette ancora di imporre che il potenziale φ assuma valori eguali ed opposti $\varphi^\times$ e $-\varphi^\times$ nei due punti P' e P'' di raccordo fra le pareti rigide μ_1 e μ_2 e la linea libera λ.

La funzione ψ invece deve assumere sui due rami del contorno $\varpi_1 + \varpi_2$ e $\mu_1 + \lambda + \mu_2$ valori costanti e, come è ben noto, diversi fra loro. Visto che deve essere

$$\psi = 0 \qquad \textit{in ogni punto di } \varpi_1 + \varpi_2$$

ed assunta π come misura della portata della vena liquida in moto, dovremo ritenere

$$\psi = \pi \quad \textit{in ogni punto di } \mu_1 + \lambda + \mu_2 .$$

Detta infine p la pressione del fluido in un punto generico di A occupato da una particella dotata della velocità V, e p_0 la pressione costante che si è supposta regnare in ogni punto di B e quindi di λ, e tenuto presente l'ultimo elemento di arbitrarietà che ancora ci resta nella scelta delle unità di misura, noi possiamo scrivere l'ultima condizione ai limiti imponendo

$$V = 1 \qquad \textit{in ogni punto di } \lambda$$

con che la relazione che compendia le equazioni idrodinamiche di Eulero assume la forma

$$p = p_0 + \tfrac{1}{2}(1 - V^2)$$

3. Posto al solito

$$z = x + iy$$
$$w = u - iv$$
$$f = \varphi + i\psi$$

con che w ed f risultano entrambe funzioni della variabile complessa z, legate dalla relazione

$$\frac{df}{dz} = w$$

si osservi che la relazione funzionale $f = f(z)$ permette di rappresentare in modo conforme il campo A del piano z sopra una striscia $0 < \psi < \pi$ del piano complesso f nel modo indicato dalla fig. 2.

Immaginando z espressa per f, la w, funzione di z uniforme e regolare in A, punto all'infinito compreso, può considerarsi come funzione di f finita e continua in tutti i punti della detta striscia.

Per $\psi = \pi$ e $-\varphi^\times < \varphi < \varphi^\times$ cioè sul segmento $f'f''$ del bordo superiore della striscia, immagine della linea libera λ, si ha

$$|w| = 1 .$$

Se perciò si pone

$$w = e^{-i\omega}$$

convenendo che nel punto all'infinito a valle, là dove $w = V_2$, sia $\omega = i \log V_2$ (dove al logaritmo spetta il suo valore aritmetico), la funzione ω così definita risulta finita e continua in tutta la striscia considerata, bordi compresi, tranne che in corrispondenza dei punti immagini dei vertici della parete rigida, in prossimità dei quali $i\omega$ tende verso $+\infty$. Su $f'f''$, ω assume valori puramente reali.

Posto infine

$$\omega = \theta + i\tau$$

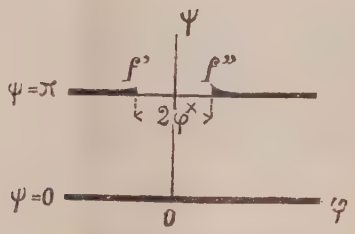


Fig. 2.

con θ e τ reali, si ha al solito

$$|w| = e^{\tau}$$

$$\frac{u + iv}{V} = e^{i\theta},$$

τ è adunque il logaritmo naturale del valore assoluto della velocità nel punto generico di A; θ è l'angolo che la direzione della velocità stessa forma colla direzione positiva dell'asse x, contato fra π e $-\pi$, positivamente nel verso $x \rightarrow y$, negativamente nel verso opposto.

4. È opportuno effettuare a questo punto un cambiamento di variabile che sostituisca alla striscia $0 < \psi < \pi$ del piano f un semicerchio il cui contorno corrisponda alle due rette limiti della striscia per modo che quella porzione $f'f''$ di una di esse che rappresenta la linea libera λ del piano z e sulla quale ω è risultato reale, venga a sua volta ad avere per immagine il diametro.

Lo scopo si può raggiungere ponendo successivamente:

$$e^f = \mathrm{F} = \frac{b + \mathrm{Z}}{b - \mathrm{Z}}$$

con [1]

$$b = \frac{e^{\varphi^\times} - 1}{e^{\varphi^\times} + 1} = \cos\beta$$

e

$$\mathrm{Z} = -\frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

o, più direttamente

$$f = \log \frac{b - \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)}{b + \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)} = \pi i + \log \frac{\zeta^2 - 2b\zeta + 1}{\zeta^2 + 2b\zeta + 1} .$$

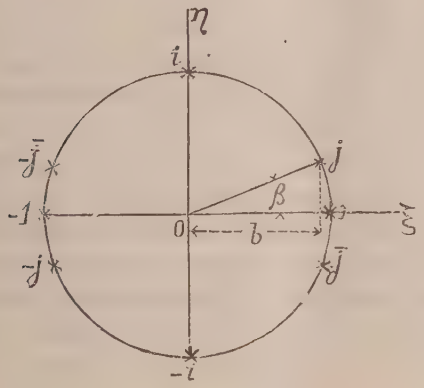


Fig. 3.

In tal guisa alla solita striscia del piano f, sulla quale avevamo rappresentato il campo A sede del moto, si viene a far corrispondere sul piano della nuova variabile $\zeta = \xi + i\eta$ il semicerchio $|\zeta| \leq 1$, $\eta \geq 0$ (fig. 3) per modo che:

il punto di affissa $j = e^{i\beta}$ rappresenta il punto all'infinito a monte del moto;

[1] La grandezza b che così si viene ad introdurre (o, ciò che fa lo stesso, l'angolo β che essa determina a meno dei soliti multipli di 2π) può, in un certo senso, assumersi come indice della maggiore o minore estensione della discontinuità. Ed invero si può facilmente verificare che la lunghezza dell'arco P'P'' di linea libera è misurata da

$$2\varphi^\times = 2 \log \frac{1 + b}{1 - b} .$$

Al tendere di b a zero o, ciò che fa lo stesso, al tender di β verso $\frac{\pi}{2}$, i due punti P'

l'arco di circonferenza $j, 1$ è immagine della parete rigida μ_1;
il punto di affissa 1 rappresenta il punto di raccordo P';
il diametro $1, -1$ è immagine della linea libera λ;
il punto di affissa -1 rappresenta il punto di raccordo P'';
l'arco di circonferenza $-1, -\bar{j}$ è immagine della parete rigida μ_2
il punto di affissa $-\bar{j} = -e^{-i\beta}$ rappresenta il punto all'infinito a valle del moto;
i due archi di circonferenza j, i ed $i, -\bar{j}$ sono rispettivamente immagini delle due porzioni ϖ_1 ed ϖ_2 dell'altra parete.

Se ora si osserva che la funzione ω, considerata come funzione della nuova variabile ζ, per essere regolare entro il semicerchio dato e reale sull'asse reale, può in virtù del principio di Schwarz, continuarsi per riflessione analitica nel semicerchio sottostante, si potranno studiare gli elementi così cinematici come geometrici (1) del problema, analizzando il comportamento della funzione $\omega(\zeta)$ regolare in tutto il cerchio $|\zeta| < 1$, finita e continua sulla circonferenza $|\zeta| = 1$, eccezione fatta per un gruppo discreto di punti della semicirconferenza $1, i, -1$, immagini dei punti angolosi della parete rigida, nonchè per quegli altri punti della semicirconferenza $1, -i, -1$ che si ottengono dai primi per riflessione.

5. Sia $\zeta_h = e^{i\sigma_h}$ l'affissa di un punto della semicirconferenza $1, i, -1$ immagine di un punto angoloso P_h della parete rigida. Per $\zeta = \zeta_h$ la funzione $\omega(\zeta)$ non può conservarsi finita, ma diviene infinita in modo non accessibile all'intuizione diretta. È noto però che a caratterizzare la natura della singolarità basta la conoscenza dell'andamento della sua parte reale; basta cioè l'imporre che, al muoversi di P su quella delle due linee di contorno del campo del moto su cui sta il punto P_h, si abbia

$$\begin{cases} \lim \theta = \theta'_h & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo la porzione di contorno } j, \zeta_h \\ \lim \theta = \theta''_h & \text{per } \zeta \text{ tendente a } \zeta_h \text{ lungo la porzione di contorno } -\bar{j}, \zeta_h, \end{cases}$$

θ'_h e θ''_h essendo gli angoli che la tangente alla parete rigida immediatamente a monte ed a valle di P_h, prese nel senso del moto, formano colla direzione positiva dell'asse x.

---

e P'' si avvicinano indefinitamente. Per contro per $b = 1$ cioè per $\beta = 0$ l'arco di linea libera si estende indefinitamente così a monte che a valle del moto: si ricade allora, come caso particolare, in quello stesso problema di cui mi sono occupato nella citata mia Memoria.

(1) In particolare le immagini sul piano ζ delle linee di flusso $\psi = K$ del piano z sono *quartiche* aventi per equazione

$$4b\eta[1 - (\xi^2 + \eta^2)] = \operatorname{tg} K\{4b^2(\xi^2 + \eta^2) - (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\xi^2 - \eta^2) - 1\}.$$

Per contro in ogni punto del contorno immagine di un punto non angoloso, $\theta(\zeta)$ deve riguardarsi come funzione continua dotata di derivata pure continua.

Detta pertanto θ_0 una particolare funzione armonica entro il cerchio $|\zeta| < 1$, simmetrica rispetto all'asse reale, soddisfacente a tutte le condizioni di discontinuità testè imposte, nonchè a quelle che ne derivano sulla semicirconferenza $1, -i, -1$ per riflessione, e detta τ_0 la sua associata (la costante additiva intendendosi presa in modo che τ_0 si annulli nell'origine) la funzione

$$\omega_0 = \theta_0 + i\tau_0$$

della variabile complessa ζ si mantiene reale sull'asse reale.

L'integrale generale del moto in questione può perciò scriversi sotto la forma

$$\omega = \omega_0 - \Omega,$$

Ω essendo una funzione della variabile complessa ζ, reale essa pure sull'asse reale, regolare entro il cerchio $|\zeta| < 1$, al pari di ω e di ω_0, ma avente sopra di esse il vantaggio di restare finita e continua anche sulla circonferenza $|\zeta| = 1$.

Sulla possibilità di costruire, in ogni caso speciale, la funzione ω_0, non è qui il caso di insistere; si tratta di cosa nota (1).

Termineremo perciò ricordando come il grado di arbitrarietà dell'integrale generale proposto, può mettersi in evidenza per mezzo della serie

$$\Omega = \sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \zeta^n,$$

dove le c_n sono costanti reali legate dalle condizioni:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n \cos n\sigma_h = 0$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n c_n e^{-in\beta} = \omega_0(-\bar{j}) - i \log V_2$$

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} c_n e^{in\beta} = \omega_0(j) - \alpha - i \log V_1 .$$

(1) Cisotti, *Vene fluenti*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1908; ovvero: Memoria citata (1), § 13.

Matematica. — *L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell'integrale infinito.* Nota del dott. G. C. Evans, presentata dal Corrisp. G. Lauricella.

1. In una prima Nota su questo soggetto abbiamo considerato il piano xy come se l'infinito fosse un solo punto, cioè le nostre funzioni avevano sempre ciascuna un solo valore, indipendente dal modo secondo cui crescono i valori delle variabili. Nell'altro caso si può procedere in modo diretto, e dimostrare il teorema seguente:

Teorema 5. — *Nell'equazione*

$$u(x) = \varphi(x) + \int_x^\infty K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi \tag{1}$$

supponiamo che $\varphi(x)$ *sia continua nel tratto* $x \geqq a$, *e finita in valore assoluto* $< P_1$, *e* $K(x, \xi)$ *sia continua nel campo* $a \leqq x \leqq \xi$, *e finita in valore assoluto* $< P_2$, *e che* $\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi$ *esista per* $x \geqq a$. *Allora se può trovarsi un valore* b *tale che*

$$\int_x^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi \leqq N < 1 \qquad x \geqq b,$$

si avrà che esiste una soluzione dell'equazione, limitata, che vale per $x \geqq a$ (1).

Non c'è nessun'altra soluzione finita e integrabile (2) *nel tratto* $x \geqq a$.

Si può scrivere un teorema più generale, ma si perdono così le proprietà dell'operatore

$$\int_x^\infty K(x, \xi)\, \{\ \}\ d\xi,$$

cioè le proprietà le quali rappresentano l'estensione del campo di variabilità al piano non proiettivo.

(1) La soluzione appartiene alla classe I di R. Baire.

(2) Integrabile nel senso di Riemann o di Lebesgue.

2. Il teorema enunciato può dimostrarsi ricorrendo ad un teorema di analisi data da Osgood (1). Per questo poniamo

$$S_n(m,x) = \varphi(x) + \int_\alpha^m K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi + \\ + \int_\alpha^m d\xi\, K(x,\xi) \int_\xi^m K(\xi,\xi')\,\varphi(\xi')\,d\xi' + \cdots$$

$$\cdots + \int_\alpha^m d\xi\, K(x,\xi) \int_\xi^m d\xi'\, K(\xi,\xi') \int_{\xi'}^m \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^m K(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})\,\varphi(\xi^{(n)})\,d\xi^{(n)}$$

e poniamo quando esistono

$$S_n(x) = \lim_{m=\infty} S_n(m,x)$$

$$S(m,x) = \lim_{n=\infty} S_n(m,x)$$

$$= \varphi(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \int_\alpha^m d\xi\, K(x,\xi) \int_\xi^m d\xi'\, K(\xi,\xi') \int_\xi^m \cdots \\ \cdots \int_{\xi_{(n-1)}}^m K(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})\,\varphi(\xi^n)\,d\xi^{(n)},$$

$$S(x) = \lim_{m=\infty} \left[\lim_{n=\infty} S_n(m,x) \right].$$

Lemma. Consideriamo una funzione qualunque $f(m,x)$ continua in x per un valore qualsiasi della m, che è finita, in valore assoluto $< Q$, e tale che

(α) $\lim_{m=\infty} f(m,x)$ esiste, e (β) $\lim_{\substack{m=\infty \\ m'>m}} \int_{\alpha'}^{\alpha_1} |f(m',x) - f(m,x)|\,dx = 0$

uniformemente, quando $b \leqq x' \leqq x_1$, dove x_1 è un valore qualunque nel tratto $x \geqq b$ (2). *Allora si ha che*

$$f_1(m,x) = \int_\alpha^m K(x,\xi)\,f(m,\xi)\,d\xi$$

è una funzione dello stesso genere.

Infatti $f_1(m,x)$ è continua e finita in valore assoluto $< QN$. E inoltre

$$|f_1(m',x) - f_1(m,x)| \leqq \int_m^{m'} |K(x,\xi)\,f(m',\xi)|\,d\xi + \\ + \int_\alpha^m |K(x,\xi)|\,|f(m',\xi) - f(m,\xi)|\,d\xi$$

$$\leqq Q \int_m^{m'} |K(x,\xi)|\,d\xi + 2Q \int_{m_0}^m |K(x,\xi)|\,d\xi + P_2 \int_\alpha^{m_0} |f(m',\xi) - f(m,\xi|\,d\xi.$$

(1) W. Osgood, *Funktionentheorie*, vol. I, pag. 519.

(2) Non vi è bisogno di questa ipotesi se si usano i concetti degli insiemi misurabili ma conviene non introdurre metodi non necessarî all'uopo.

Fissato un valore ε consideriamo un solo valore x e prendiamo m_0 tanto grande che si abbia

$$\int_{m_0}^{\infty} |K(x,\xi)|\, d\xi \leqq \frac{\varepsilon}{4Q} .$$

Poi prendiamo $m > m_0$ tanto grande che si abbia

$$\int_{x}^{m_0} |f(m',x) - f(m,x)|\, dx \leqq \frac{\varepsilon}{4P_2} .$$

Quindi si avrà

$$|f_1(m',x) - f_1(m,x)| \leqq \varepsilon .$$

Cioè $\lim_{m=\infty} f_1(m,x)$ esiste.

Si ha anche, essendo x' nel tratto $b \leqq x' \leqq x_1$, e x_1 un valore fisso,

$$\int_{x'}^{x_1} |f_1(m',x) - f_1(m,x)|\, dx \leqq$$

$$\int_{x'}^{x_1} \left| \left\{ \int_{m}^{m'} K(x,\xi) f(m',\xi)\, d\xi + \int_{m_0}^{m} K(x,\xi)\,(f(m',\xi) - f(m,\xi))\, d\xi + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_{x}^{m_0} K(x,\xi)\,(f(m',\xi) - f(m,\xi))\, d\xi \right\} \right| dx$$

$$\leqq 3Q \int_{x'}^{x_1} \left\{ \int_{m_0}^{m'} |K(x,\xi)|\, d\xi \right\} dx + P_2 \int_{x'}^{x_1} \left\{ \int_{x}^{m_0} |f(m',\xi) - f(m,\xi)|\, d\xi \right\} dx$$

dove $m > m_0$. Preso m_0 tanto grande che sia

$$\int_{m_0}^{m'} |K(x,\xi)|\, d\xi \leqq \frac{\eta}{6Q(x_1 - b)} ,$$

prendiamo $m > m_0$ tanto grande che si abbia

$$\int_{x}^{m_0} |f(m',\xi) - f(m,\xi)|\, d\xi \leqq \frac{\eta}{2P_2(x_1 - b)} .$$

Dunque si avrà

$$\int_{x'}^{x_1} |f_1(m',x) - f_1(m,x)|\, dx \leqq \eta$$

la quale dimostra la desiderata convergenza uniforme.

Ma in questo modo si dimostra che tutti gli integrali che compaiono nella funzione $S_n(m,x)$ sono delle funzioni $f(m,x)$ perchè $\varphi(x)$ è una tale funzione. E per conseguenza si ha che

a) $$S_n(x) = \lim_{m=\infty} S_n(m,x) \text{ esiste}, \quad x \geqq b .$$

Inoltre segue dalla convergenza della serie $S(m, x)$ che

$$b) \qquad S(m, x) = \lim_{n=\infty} S_n(m, x) \text{ esiste, } x \geqq b,$$

e dall' ineguaglianza

$$|S_n(m, x)| \leqq P_1[1 + N + N^2 + \cdots + N^{n+1}] \leqq P_1 \frac{1}{1 - N}, \quad x \geqq b,$$

che la convergenza affermata di $S(m, x)$ è uniforme rispetto alla m. Quindi si ha dal teorema sopracitato di Osgood che

$$c) \qquad \begin{cases} S(x) = \lim_{m=\infty} S(m, x) \text{ esiste,} & x \geq b, \\ \lim_{n=\infty} S_n(x) \text{ esiste e è eguale a } S(x), & x \geqq b. \end{cases}$$

3. Dalla forma della serie $S(m, x)$ si ha l'equazione

$$(2) \qquad \int_a^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi = S(m, x) - \varphi(x),$$

e quindi dalla c),

$$(3) \qquad \lim_{m=\infty} \int_a^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \text{ esiste e è eguale a } S(x) - \varphi(x).$$

Ma il primo membro dell'equazione (3) può scriversi nella forma

$$\lim_{m=\infty} \int_a^\infty K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi,$$

infatti si ha

$$\left| \int_a^\infty K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi - \int_a^m K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \right| \leqq$$

$$\leqq \int_m^\infty |K(x, \xi)|\, |S(m, \xi)|\, d\xi \leqq \frac{P_1}{1 - N} \int_m^\infty |K(x, \xi)|\, d\xi,$$

che per un valore fisso di x si può fare tanto piccola quanto ci piace, col prendere m abbastanza grande. E questa non è altro che

$$(4) \qquad \lim_{m=\infty} \left(\lim_{m_1=\infty} \int_a^{m_1} K(x, \xi)\, S(m, \xi)\, d\xi \right).$$

Per meglio esaminare quest' ultima funzione (4) sarà opportuno con un cambiamento nell'ordine di integrazione scriverla in un'altra forma. Infatti

dalla formula

$$\int_x^m d\xi\, \mathrm{K}(x,\xi) \int_\xi^m \mathrm{K}(\xi,\xi')\,\varphi(\xi')\,d\xi' = \int_x^m d\xi'\,\varphi(\xi') \int_x^{\xi'} \mathrm{K}(x,\xi)\,\mathrm{K}(\xi,\xi')\,d\xi$$

si ha

$$\int_x^m d\xi\, \mathrm{K}(x,\xi) \int_\xi^m d\xi'\, \mathrm{K}(\xi,\xi') \int_{\xi'}^m \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^m \mathrm{K}(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})\,\varphi(\xi^{(n)})\,d\xi^{(n)} =$$

$$= \int_x^m d\xi^{(n)}\,\varphi(\xi^{(n)}) \int_x^{\xi^{(n)}} d\xi\, \mathrm{K}(x,\xi) \int_\xi^{\xi^{(n)}} \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi^{(n-3)}}^{\xi^{(n)}} \mathrm{K}(\xi^{(n-3)},\xi^{(n-2)}) \int_{\xi^{(n-2)}}^{\xi^{(n)}} \mathrm{K}(\xi^{(n-2)},\xi^{(n-1)})\,\mathrm{K}(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})\,d\xi^{(n-1)}.$$

E si può scrivere

$$\mathrm{S}(m,x) = \varphi(x) - \int_x^m k'(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi \tag{5}$$

dove $k'(x,y)$, il nucleo dell'equazione risolvente di Volterra, è dato dalla formula

$$k'(x,y) = -\mathrm{K}(x,y) - \sum_{n=0}^{\infty} \int_x^y d\xi\, \mathrm{K}(x,\xi) \int_\xi^y d\xi'\, \mathrm{K}(\xi,\xi') \int_{\xi'}^y \cdots$$

$$\cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^y \mathrm{K}(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})\,\mathrm{K}(\xi^{(n)},y)\,d\xi^{(n)}.$$

E siccome $x \leqq \xi \leqq \xi' \leqq \cdots \leqq \xi^{(n)} \leqq y$, si ha

$$|k'(x,y)| \leqq \frac{\mathrm{P}_2}{1-\mathrm{N}}.$$

Di più, essendo sempre uniforme la convergenza della serie in x, y, si ha

$$\int_x^m |k'(x,y)|\,dy \leqq \int_x^m |\mathrm{K}(x,y)|\,dy +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \int_x^m dy \int_x^y \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^y |\mathrm{K}(\xi^{(n-1)},\xi^{(n)})|\,|\mathrm{K}(\xi^{(n)},y)|\,d\xi^{(n)}$$

la quale, dopo avere usato l'inversa della trasformazione già fatta direttamente, si vede che è $\leqq \mathrm{N}/(1-\mathrm{N})$.

Per conseguenza l'integrale $\int_x^\infty |k'(x,\xi)|\,d\xi$ esiste, e la funzione

$$\int_x^m k'(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi$$

gode delle proprietà delle funzioni $f(m,x)$ dell'articolo (2). Perciò $\mathrm{S}(m,x)$

gode delle stesse proprietà. Inoltre siccome

$$\int_{x'}^{x_1} |K(x,\xi)|\,|S(m',\xi) - S(m,\xi)|\,d\xi \leq P_2 \int_{x'}^{x_1} |S(m',x) - S(m,x)|\,dx,$$

si vede che

$$\lim_{m=\infty} \int_{x'}^{x_1} K(x,\xi)\,S(m,\xi)\,d\xi \qquad \left\{ \begin{matrix} a \leq x \\ a \leq x' \leq x_1 \end{matrix} \right\}$$

esiste.

Tornando ancora all'espressione (4) si ha che

$$(a) \qquad \lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x,\xi)\,S(m,\xi)\,d\xi \text{ esiste,}$$

$$(b) \qquad \lim_{m_1=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x,\xi)\,S(m,\xi)\,d\xi \text{ esiste,}$$

e quest'ultimo uniformemente rispetto alla m; quindi applicando il teorema sopracitato di Osgood, si può nell'espressione (4) invertire l'ordine dei due limiti, e scriverla

$$(6) \qquad \lim_{m_1=\infty} \left[\lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x,\xi)\,S(m,\xi)\,d\xi \right].$$

Ma $\lim_{m=\infty} \int_{x}^{m_1} K(x,\xi)\,S(m,\xi)\,d\xi$ non è altro che $\int_{x}^{m_1} K(x,\xi)\,S(\xi)\,d\xi$ dove l'integrale è l'integrale di Lebesgue (1). Perciò si ha dalla (3)

$$\int_{x}^{\infty} K(x,\xi)\,S(\xi)\,d\xi = S(x) - \varphi(x)$$

e quindi $S(x)$ è soluzione dell'equazione (1).

4. Supponiamo che esista un'altra soluzione $u(x)$, limitata, e integrabile nel senso di Riemann o di Lebesgue (2). Si ha che la differenza,

(1) Per dare una definizione abbastanza generale dell'integrale non bisogna allontanarsi dai metodi delle funzioni continue. Data una funzione $f(x)$ supponiamo che possa trovarsi una serie di funzioni $f_n(x)$ continue, finite in valore assoluto $< M$, tale che $\lim_{n=\infty} f_n(x) = f(x)$. Allora si definisca $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$. Che l'integrale è univocamente determinato segue dal fatto che se $f(x)$ è anche continua si ha come teorema la sopra data definizione (Osgood, *On the non uniform convergence*, Amer. Journal of Math. 1897). Quindi la differenza di due tali rappresentazioni avrà lo zero come limite dell'integrale.

La definizione qui data compare come caso speciale di un teorema di H. Lebesgue (*Leçons sur l'integration*, pag. 114).

(2) O nel senso più generale di una definizione che soddisfa le prime cinque condizioni di Lebesgue, ma non necessariamente l'ultima (vedi pag. 98, *Leçons sur l'integration*).

$v(x) = u(x) - S(x)$, è finita, integrabile, e soluzione dell'equazione omogenea

$$v(x) = \int_x^\infty K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi .$$

Quindi l'integrale $\int_x^\infty K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi$ è limitato e integrabile e si ha

$$v(x) = \int_x^\infty d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^\infty K(\xi, \xi')\, v(\xi')\, d\xi'$$

e nello stesso modo

$$v(x) = \int_x^\infty d\xi\, K(x, \xi) \int_\xi^\infty d\xi' K(\xi, \xi') \int_{\xi'}^\infty \cdots \int_{\xi^{(n-1)}}^\infty K(\xi^{(n-1)}, \xi^{(n)})\, v(\xi^{(n)})\, d\xi^{(n)} .$$

Per conseguenza $|v(x)| \leq \text{cost.}\, N^{n+1}$, per n qualsiasi, il che dice che $v(x)$ deve essere dappertutto zero per $x \geqq b$.

5. Si è dimostrato che esiste una e una sola soluzione limitata e integrabile nel tratto $x \geqq b$. Per completare il teorema bisogna dimostrare che la stessa proprietà vale per il tratto $x \geqq a$. Questo si fa senza difficoltà, scrivendo l'equazione (1) nella forma

$$u(x) = \psi(x) + \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi ,$$

che è un'equazione col limite dell'integrale finito, dove la funzione

$$\psi(x) = \varphi(x) + \lim_{m=\infty} \int_b^m K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

è conosciuta, per $x \leq b$, per mezzo della soluzione già ottenuta per $x \geqq b$. Le discontinuità della funzione $\psi(x)$ si possono trattare facendo uso del ragionamento degli articoli 3 e 4 [1], e per mezzo di questo si può dimostrare che *la soluzione dell'equazione* (1) *può essere scritta nella forma*

$$u(x) = \varphi(x) - \int_a^\infty k'(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi ,$$

una forma che vale dunque per $x \geqq a$. *Il nucleo di questa equazione risolvente è continuo.*

[1] La convergenza della serie sarà del tipo $\Sigma \frac{M^\lambda}{i!}$ invece di $\Sigma N^\lambda, N < 1$.

Geodesia. — *Sulle rappresentazioni isodromiche.* Nota di Corradino Mineo, presentata dal Corrisp. A. Venturi.

Il prof. Venturi (1) ha chiamato *isodromica* una rappresentazione di una superficie S su di un'altra S′, che, senza essere conforme, conserva le *lossodromiche*, cioè trasforma ogni traiettoria isogonale d'una delle famiglie di linee coordinate della S, per es. delle $v = costante$, in una traiettoria isogonale delle curve corrispondenti alle $v = costante$ sulla S′. Il Venturi ha mostrato in qual modo si possa soddisfare alle condizioni d'isodromia in un caso particolare, del resto molto ampio e interessante. È però possibile risolvere la questione in modo affatto generale: il che ci proponiamo di fare in questa breve Nota, sia per le importanti proprietà angolari di queste rappresentazioni, già messe in rilievo dal prof. Venturi, sia ancora perchè esse costituiscono una notevole generalizzazione delle rappresentazioni conformi.

1. Supponiamo di riferire la superficie S a un sistema isotermo (u, v), che dia all'elemento lineare la forma

$$ds^2 = \lambda(du^2 + dv^2). \tag{1}$$

Similmente la S′ sia riferita a un sistema isotermo (u', v'), in modo che si abbia

$$ds'^2 = \lambda'(du'^2 + dv'^2). \tag{2}$$

La nostra rappresentazione della S su S′ sarà analiticamente espressa dalle formole

$$u' = u'(u, v) \quad , \quad v' = v'(u, v). \tag{3}$$

Per mezzo di queste la (2) diviene

$$ds'^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\,\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2, \tag{4}$$

dove E, F, G sono funzioni di u e v, date dalle formole

$$\begin{cases} \mathrm{E} = \lambda'\left[\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right)^2\right], \\ \mathrm{F} = \lambda'\left[\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + \dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right], \\ \mathrm{G} = \lambda'\left[\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2\right]. \end{cases} \tag{5}$$

(1) A. Venturi, *Sopra alcune proprietà rappresentative degli angoli e sulla proiezione isodromica.* Rivista geografica italiana, Firenze, 1898, fasc. IX-X, pp. 35-37.

Chiamando θ l'angolo che una curva qualunque di S forma con le $v = costante$, abbiamo da una nota formola:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{dv}{du}. \tag{6}$$

E per il corrispondente angolo θ' sulla S′:

$$\operatorname{tg}\theta' = \sqrt{EG - F^2}\,\frac{dv}{E\,du + F\,dv}. \tag{7}$$

Introduciamo ora l'angolo ω delle linee u e v della S′ (corrispondenti alle omonime della S), e i *moduli di deformazione lineare* [1] m_u e m_v, relativi alle linee u e v di S; abbiamo:

$$\begin{cases} \cos\omega = \dfrac{F}{\sqrt{EG}} \quad , \quad \sin\omega = \dfrac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}; \\ m_u = \sqrt{\dfrac{G}{\lambda}} \quad , \quad m_v = \sqrt{\dfrac{E}{\lambda}}. \end{cases} \tag{8}$$

Allora la (7) si può scrivere

$$\operatorname{cotg}\theta' = \frac{m_v}{m_u}\operatorname{cosec}\omega\operatorname{cotg}\theta + \operatorname{cotg}\omega \ [2]. \tag{9}$$

Ora affinchè la rappresentazione conservi le lossodromiche, occorre e basta che per ogni $\theta = costante$, anco θ' si riduca a una costante, e perciò è necessario e sufficiente porre, essendo h e k due costanti:

$$\operatorname{tg}\omega = h \quad , \quad \frac{m_v}{m_u} = k \ [3]; \tag{10}$$

ossia per le (5), (8):

$$\begin{cases} \dfrac{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v} - \dfrac{\partial u'}{\partial v}\dfrac{\partial v'}{\partial u}}{\dfrac{\partial u'}{\partial u}\dfrac{\partial u'}{\partial v} + \dfrac{\partial v'}{\partial u}\dfrac{\partial v'}{\partial v}} = \pm h, \\ \dfrac{\left(\dfrac{\partial u'}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial u}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial u'}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v'}{\partial v}\right)^2} = k^2. \end{cases} \tag{11}$$

[1] Vedi, per es., Pizzetti, *Trattato di Geodesia teoretica*. Bologna, Zanichelli, 1905, pag. 361.

[2] Cfr. Venturi, loc. cit., pag. 35.

[3] La necessità della condizione $\omega = costante$ è evidente *a priori*.

Il sistema (11) si trasforma senza difficoltà in quest'altro

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial u} = \mp\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial v'}{\partial u} + k\dfrac{\sqrt{1+h^2}}{h}\dfrac{\partial v'}{\partial v}\,, \\ \dfrac{\partial v'}{\partial u} = \pm\dfrac{1}{h}\dfrac{\partial u'}{\partial u} - k\dfrac{\sqrt{1+h^2}}{h}\dfrac{\partial u'}{\partial v}\,. \end{cases}$$

E cambiando le variabili u e v nelle nuove α e β, per mezzo della sostituzione

$$(13)\qquad \begin{cases} \alpha = ku \pm \dfrac{v}{\sqrt{1+h^2}}\,, \\ \beta = \pm\dfrac{hv}{\sqrt{1+h^2}}\,; \end{cases}$$

le (12) diventano

$$(14)\qquad \frac{\partial u'}{\partial \alpha} = \pm\frac{\partial v'}{\partial \beta}\quad,\quad \frac{\partial u'}{\partial \beta} = \mp\frac{\partial v'}{\partial \alpha}\,;$$

il che vuol dire che $u' + iv'$ è funzione della variabile complessa

$$(15)\qquad \alpha \pm i\beta = ku \pm \frac{1 \pm hi}{\sqrt{1+h^2}}v\,,$$

la quale si può anco scrivere, per la 1ª delle (10):

$$(16)\qquad \alpha \pm i\beta = ku + e^{\pm i\omega}v\,.$$

Di qui il seguente

Teorema. — *Essendo* (u,v) *e* (u',v') *due sistemi isotermi risp. sulle superficie* S *e* S', *la più generale rappresentazione isodromica di* S *su* S' *si ottiene ponendo*

$$(17)\qquad u' + iv' = \Phi(ku + e^{\pm i\omega}v)\,,$$

dove Φ *è il simbolo di una funzione arbitraria.*

Le costanti ω e k hanno, per la rappresentazione, i significati geometrici indicati dalle (8), (10).

Per $k = 1$, $\omega = 90°$, la rappresentazione è conforme, e il teorema precedente si riduce a quello notissimo di Gauss.

Per $\omega = 90°$ e $k \gtrless 1$, abbiamo il caso trattato dal prof. Venturi.

Notiamo infine che, supposto $k = 1$, la (17) si può anco tradurre nel seguente teorema, già trovato dal Beltrami: *Se* u' *e* v' *sono parametri isometrici di una superficie* S', *eguagliando il binomio* $u' + iv'$ *a una qualunque funzione di* $u + e^{i\omega}v$, *si ottengono due sistemi di curve* $u = \text{cost}$,

$v = \text{cost}$ *di* S', *che si tagliano dappertutto sotto l'angolo costante* ω (1). Resta inoltre dimostrata, per la (16) e per la 2ª delle (13), l'osservazione fatta dal Beltrami, *che le curve del sistema* $v = \text{cost}$ *sono, per una stessa funzione* Φ *di* $u + e^{i\omega}v$, *indipendenti dall'angolo* ω, e che quindi da una stessa funzione Φ si deduce un sistema di curve v, accompagnato dai sistemi delle sue traiettorie sotto tutti gli angoli possibili (2).

2. In virtù della (17), la (4) diviene:

$$ds'^2 = \lambda' |\Phi'|^2 \{k^2 du^2 + 2k \cos\omega \, du \, dv + dv^2\}. \tag{18}$$

E quindi per il *modulo di deformazione lineare* di un elemento ds della superficie S, formante l'angolo θ con le linee $v = \text{cost}$, abbiamo:

$$m^2 = \frac{\lambda'}{\lambda} |\Phi'|^2 \{k^2 \cos^2\theta + k \cos\omega \sin 2\theta + \sin^2\theta\}. \tag{19}$$

Da questa segue che le direzioni dei due elementi lineari di S ai quali compete il massimo e il minimo modulo di deformazione, son date dai valori di θ che soddisfanno all'equazione

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2k \cos\omega}{k^2 - 1}; \tag{20}$$

e i corrispondenti valori di m (*moduli principali*) sono

$$\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda} |\Phi'|^2 \left\{1 + k^2 + \sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2\cos^2\omega}\right\}, \\ m_2^2 &= \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda} |\Phi'|^2 \left\{1 + k^2 - \sqrt{(1-k^2)^2 + 4k^2\cos^2\omega}\right\}. \end{aligned} \tag{21}$$

La (20) mostra che gli angoli formati con le linee v dalle direzioni di massima o minima deformazione lineare, sono costanti per tutti i punti di S, e quindi le linee di massima e minima deformazione lineare costituiscono sulla S un doppio sistema (ortogonale) di lossodromiche, cui corrisponde sulla S' un altro doppio sistema (ortogonale) di lossodromiche.

Per il caso particolare $k = 1$, e per $\omega \gtrless 90°$, si vede che le linee di massima e minima deformazione lineare sono, sulla S, le traiettorie a 45° delle linee v (o u).

Dalle (21), poi, segue che per ogni punto di S è costante il rapporto $\frac{m_1}{m_2}$ dei moduli principali lineari.

(1) Beltrami, *Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque.* Opere matematiche, Hoepli, t. I (1902), pag. 329.

(2) Beltrami, *Ibidem*, pag. 329.

Sarebbe poi facile dimostrare, date le (20) e (21), che la massima e la minima proiezione su S′ di uno stesso angolo Δ di S restano costanti, al variare dell'orientazione di Δ, qualunque sia il punto di S; e corrispondono a due orientazioni di Δ pure indipendenti dal punto considerato. In generale è costante intorno a ogni punto di S ogni circostanza angolare, rispetto alla rappresentazione (1).

Matematica — *Sulle funzioni implicite.* Nota del dott. L. Orlando, presentata dal Corrisp. A. Di Legge.

Data l'equazione $f(x, y) = 0$, si può in molti casi dedurne una funzione continua $y = \varphi(x)$ della variabile x, che abbia per derivata

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{1}$$

È molto naturale domandarsi in quali casi ciò avvenga: ma una precisa risposta non è così facile a formularsi come la domanda.

Intanto una condizione indispensabile è che esista almeno un punto a, b, tale che sia $f(a, b) = 0$. Per esempio, l'equazione $e^{x+y} = 0$ non potrà mai definire una funzione y della variabile x.

Una condizione, sufficiente insieme con $f(a, b) = 0$, affinchè in un adeguato intorno di a, b esista la $y = \varphi(x)$ e possa anche scriversi la (1), è che esistano le due derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ e siano continue in ogni punto dell'intorno, e che inoltre la derivata $\frac{\partial f}{\partial y}$ vi si mantenga di segno invariabile.

Tale condizione è data in eccellenti trattati d'analisi; per non citare altri, citerò i trattati di Genocchi-Peano e di Baire, nei quali scienza e buon senso mirabilmente si conciliano, e citerò l'ultima edizione del trattato di Jordan, circa la quale l'illustre autore potrebbe senza immodestia riferire il verso di Orazio: *exegi monumentum aere perennius.*

Io voglio, con osservazioni in parte note ed in parte facilmente deducibili, ampliare tale condizione; e poi accennerò inoltre ad un'idea, che potrà prestarsi, io credo, ad un largo svolgimento.

Supponiamo che $f(a, b)$ sia zero, e poi supponiamo che esista un rettangolo $(\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \alpha_1, \beta_2)$, orientato secondo gli assi x, y, avente a, b come punto interno, e tale che in ogni suo punto, per ogni x fisso, la funzione $f(x, y)$ della variabile y sia continua e crescente; poi ag-

(1) Cfr. Venturi, loc. cit., pp. 35-36.

giungiamo l'ipotesi che, sul lato $y = \beta_1$, la funzione $f(x, \beta_1)$ della variabile x conservi inalterato il suo segno, e che la funzione $f(x, \beta_2)$ della variabile x conservi, sul lato $y = \beta_2$, anch'essa inalterato il suo segno.

La condizione che $f(x, y)$ sia, per ogni x fisso (dunque, in particolare, per $x = a$), una funzione crescente della variabile y, ci assicura che $f(a, \beta_1)$ è inferiore ad $f(a, b)$, e quindi è negativa, e che $f(a, \beta_2)$, superando $f(a, b)$, è positiva. Ma questi due segni debbono mantenersi invariati sui lati $y = \beta_1$, $y = \beta_2$; dunque, se ξ è una qualsivoglia ascissa fra α_1 ed α_2, sarà $f(\xi, \beta_1) < 0$, $f(\xi, \beta_2) = 0$. Ma allora basta riferirsi alla supposta continuità della funzione $f(\xi, y)$ della variabile y, per vedere che esiste un η (unico, perchè tale funzione è crescente), il quale verifica la relazione $f(\xi, \eta) = 0$.

Notiamo che le ipotesi fatte sulla $f(x, y)$ sono abbastanza ampie; alquanto più restrittive sono le condizioni che imporremo ad $f(x, y)$ affinchè $y = \varphi(x)$ risulti continua. Aggiungendo alle precedenti ipotesi quella che $f(x, y)$ sia continua in ogni punto x, y del campo, dedurremo la continuità di $y = \varphi(x)$.

Supponiamo, per assurdo, che $\varphi(x)$ non sia continua per $x = \xi$; sia η la y relativa a questo valore di x. Allora, scelto un opportuno numero positivo ε, debbono sempre esistere, nelle più immediate vicinanze di ξ, valori x tali che le relative y abbiano da η una differenza non inferiore ad ε. Siano x_1 (che supporremo differente da ξ meno di 1), x_2 (che supporemo differente da ξ meno di $\frac{1}{2}$), x_3 (differente da ξ meno di $\frac{1}{3}$), ecc., siffatte ascisse, alle quali dunque corrisponderanno le ordinate $y_1, y_2, y_3, \ldots$, differenti da η non meno di ε. Questo insieme di infiniti valori $y_1, y_2, y_3, \ldots$, appartenenti all'intervallo finito (β_1, β_2), ammette qualche valore limite: sia ζ un valore limite. Questo valore limite ζ avrà nelle sue immediate vicinanze valori y_n con indice n arbitrariamente alto, corrispondenti a valori x_n arbitrariamente vicini a ξ $\left(x_n \text{ dista da } \xi \text{ meno di } \frac{1}{n}\right)$. Ma $f(x_n, y_n)$ è zero; dunque il numero fisso $f(\xi, \zeta)$ si dovrà ritenere, per la continuità di $f(x, y)$, arbitrariamente vicino a zero; tale proprietà non compete ad altro numero fisso che a zero: dunque sarà $f(\xi, \zeta) = 0$. Ma $f(\xi, y) = 0$ determina η: dunque sarà $\zeta = \eta$. Questo risultato è assurdo, perchè le y_n, che stanno nelle immediate adiacenze del valore limite ζ, debbono invece mantenere da η un distacco non inferiore al numero fisso ε.

La continuità di $y = \varphi(x)$ in ogni valore ξ dell'intervallo (α_1, α_2) resta in tale modo provata [1]. Circa la derivabilità dobbiamo aggiungere

[1] In una breve conversazione che ebbi nella scorsa estate col Bagnera, egli mi parlò di questi argomenti; non credo di avere qui riferito ciò che egli mi disse, ma certamente le idee che ho qui svolte sull'esistenza e sulla continuità di $y = \varphi(x)$ non sono molto lontane da quelle che volle indicarmi l'illustre scienziato.

altre ipotesi. Intanto supponiamo che $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ esistano, e che inoltre sia $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$.

Per metterci in un primo caso, vogliamo supporre che esista una successione (convergente a zero) di incrementi Δx della variabile x, ai quali corrisponda sempre $\Delta y = 0$. Allora, osservando che sulla curva $y = \varphi(x)$ valgono le relazioni $f(x, y) = 0$, $f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0$, noi possiamo, per tutti questi valori, sostituire $f(x + \Delta x, y)$ ad $f(x + \Delta x, y + \Delta y)$, e scrivere $f(x + \Delta x, y) - f(x, y) = 0$, o anche

$$\frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0;$$

dunque troviamo $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Se poi ad *ogni* successione di Δx convergente a zero corrispondono Δy nulli, allora risulta senz'altro valida la (1).

In un secondo caso, noi supponiamo che Δy sia (per Δx sufficientemente piccolo) sempre diverso da zero, e scriviamo identicamente:

$$(2) \qquad \frac{f(x + \Delta x, x + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \\ + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y = 0$$

$$(3) \qquad \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \Delta x + \\ + \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x + \Delta x, y)}{\Delta y} \Delta y = 0,$$

dove i punti x, y; $x + \Delta x, y + \Delta y$ appartengono alla curva $y = \varphi(x)$. Basta aggiungere alle precedenti ipotesi una di queste due: o la continuità di $\frac{\partial f}{\partial x}$ rispetto ad y, o la continuità di $\frac{\partial f}{\partial y}$ rispetto ad x, per dedurre subito la (1).

Se poi ci troviamo in un caso intermedio, che esista cioè *qualche* successione di Δy tutti nulli e *qualche altra* di Δy tutti diversi da zero, allora, procedendo come nel secondo caso su questa seconda successione [1], stabiliremo la (1), e, procedendo come nel primo caso sulla prima successione, verremo a conoscere il valore di $\frac{\partial f}{\partial x}$ (che risulterà nulla).

[1] Si ammette qui, beninteso, che esistano $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, e che una delle due sia continua rispetto all'altra variabile, e che sia $\frac{\partial f}{\partial y} > 0$.

Tenendoci su questa via, di volere, nello studio della curva $y = \varphi(x)$, far intervenire *tutta* la funzione di x, y, mediante la quale è definita, ben poco potremmo estendere le condizioni finora imposte, e ben poca luce potremmo avere sull'importante questione di conoscere quanto si stacchino tali condizioni *sufficienti* dall'essere *necessarie*. Faremo dunque capo a un'altra considerazione.

Sia $F(x, y)$ una funzione che non verifica le condizioni ora indicate. Cerchiamo una funzione $f(x, y)$ che abbia gli stessi zeri di $F(x, y)$ e che invece verifichi tali condizioni. Evidentemente la funzione $y = \varphi(x)$, se esiste come conseguenza di $F(x, y) = 0$, potrà essere studiata sulla $f(x, y)$ piuttosto che sulla $F(x, y)$. Si presenta dunque il problema di cercare $f(x, y)$, cioè di cercare una funzione, che abbia gli stessi zeri di $F(x, y)$, e che sia, rispetto alle condizioni che qui ci importano, più regolare della $F(x, y)$.

La più desiderabile funzione sarebbe $y - \varphi(x)$; ma sarebbe anche una ingenuità pensare di dedurla con un metodo generale da $F(x, y)$. Sarà, invece, opportuno fare un esame diretto delle irregolarità di $F(x, y)$, e cercare una funzione $K(x, y)$, sia pure irregolarissima, che, moltiplicata per $F(x, y)$, lasci ottenere un prodotto $f(x, y) = F(x, y) K(x, y)$ più regolare di $F(x, y)$. Sarà indispensabile, peraltro, che tale funzione $K(x, y)$, che possiamo chiamare correttiva, non si annulli e non diventi infinita nel campo. Per esempio, se F ha un salto da $\varrho \neq 0$ a $\sigma \neq 0$, noi daremo a K un salto da $\frac{\lambda}{\varrho}$ a $\frac{\lambda}{\sigma}$, dove λ rimane ancora arbitrario. L'idea fondamentale di quest'artifizio (destinato a correggere le irregolarità di F), il quale in molti casi d'immediata pratica mi è riuscito utile (1), è quella di cointeressare il meno possibile colla curva $y = \varphi(x)$ le sue adiacenze; se i punti d'irregolarità di F sono a distanza finita dalla curva, allora la regolarizzazione è teoricamente fittizia, sebbene possa in alcuni casi far comodo (se non altro per diminuire il numero dei rettangoli da considerare); ma se i punti di irregolarità si addensassero nelle più immediate adiacenze della curva $y = \varphi(x)$, allora noi, pur senza conoscere esattamente l'ubicazione di questa curva, potremmo liberarla, non certamente dalle irregolarità sue proprie, ma da fastidiosi vicini.

(1) È un grossolano errore quello di credere che le funzioni utili in pratica siano le più facilmente trattabili; per esempio, nella lettura comparativa dei diagrammi sperimentali, bisogna, se si vuol procedere con coscienza, largamente sfruttare quella *microscopia* analitica, che oggi, per malinteso spirito di comodità, si suole da molti proclamare inutile.

Chimica. — *Formazione di soluzioni solide metalliche per diffusione allo stato solido* (1). Nota di G. Bruni e D. Meneghini, presentata dal Socio G. Ciamician.

Il fenomeno della diffusione fra solidi è stato dimostrato da molti autori su materiali di natura diversa, ma specialmente fra metalli. La constatazione della diffusione venne però fatta o per analisi chimica dei varî strati, oppure mediante osservazioni micrografiche.

Occupandoci ora di uno studio sistematico di questi fenomeni, abbiamo creduto interessante di ricercare se si possa stabilire detta diffusione, nel caso della formazione di soluzioni solide, mediante osservazioni di variazioni di proprietà fisiche. È infatti noto che in molti casi certe proprietà fisiche delle soluzioni solide sono assai diverse da quelle che si calcolerebbero come medie delle proprietà dei componenti.

Così si comportano infatti le soluzioni solide per rispetto alla conduttività elettrica. La aggiunta di un metallo ad un altro quando vi si sciolga allo stato solido, ne abbassa la conduttività elettrica, e, in genere, assai notevolmente. Quando le soluzioni solide possono formarsi in tutti i rapporti, la curva delle conduttività in funzione delle concentrazioni è una curva continua che presenta un minimo per lo più assai piatto. Così si comportano p. es. le coppie rame-nichel, rame-oro, argento-oro. Noi abbiamo sperimentato auzitutto sulla prima di dette coppie, e riferiamo qui i risultati ottenuti.

Rame-nichel dànno cristalli misti in tutti i rapporti, come venne dimostrato da Guertler e Tammann (2) e da Kurnakow e Zemczużnyj (3). La curva di solidificazione sale infatti senza alcuna discontinuità dal punto di fusione del rame (1084°) a quella del nichel (1484°). Le conduttività a zero gradi di queste leghe vennero determinate da Feussner (4).

La curva relativa, partendo dalla conduttività del rame 65,3, scende subito assai rapidamente e presenta un minimo assai piatto con un tratto quasi orizzontale per composizioni da 40 a 60 % in peso di rame; e risale quindi alla conduttività del nichel 8,9.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di chimica docimastica e tecnologica della Scuola di applicazione per gli ingegneri della R. Università di Padova.

(2) Zeitschr. f. anorg. Chem. *52*, 25, (1907).

(3) Zeitschr. f. anorg. Chem. *54*, 149, (1907).

(4) Verhandl. d. physik. Ges. Berlin, *10*, 109 (1891). Cfr. Guertler, Zeit. f. anorg. Chem. *51*, 403, (1906), e Kurnakow e Zemczużnyj, loc. cit., 159.

La conduttività minima osservata è circa 1,9. Le leghe corrispondenti alla zona di minimo, e specialmente quella al 60 % di rame, vengono utilizzate nella pratica ed indicate col nome di costantana.

Noi abbiamo voluto vedere se dette leghe possano formarsi per diffusione allo stato solido, e se la loro formazione possa verificarsi col corrispondente aumento di resistenza elettrica. Abbiamo preso un filo di nichel del diametro di 0,5 mm. e lo abbiamo ricoperto di rame mediante elettrolisi. Abbiamo cercato di ottenere uno strato quanto più compatto fosse possibile; abbiamo quindi operato con un bagno di cianuro cupro-potassico, con un anodo costituito da una treccia di fili di rame e con una corrente debolissima di 0,1 Amp. Abbiamo continuato l'elettrolisi fino ad avere un deposito tale da corrispondere presso a poco alla proporzione in cui il rame sta al nichel nella costantana.

Del filo venne poscia misurata la resistenza elettrica su un tratto di 20 centimetri. Esso venne quindi riscaldato, tenendolo orizzontale, in una lunga e sottile provetta di porcellana, che veniva introdotta in un forno elettrico a resistenza di Heraeus. Per evitare l'ossidazione, si faceva passare continuamente una corrente di idrogeno secco. Il forno veniva tenuto ad una temperatura di 1000° con lievi oscillazioni; si restava così a temperatura di circa 80 gradi inferiore al più basso possibile punto di fusione, che è quello del rame. Siccome poi il metallo più fusibile stava all'esterno, si sarebbe facilmente avvertito anche il minimo inizio di fusione, mentre non se ne ebbe mai traccia. La temperatura veniva continuamente controllata e misurata mediante una coppia termoelettrica platino, platino-rodio ed un galvanometro di Siemens e Halske graduato in temperature e campionato nel solito modo.

Il riscaldamento veniva interrotto di tempo in tempo, e si misurava la resistenza dello stesso tratto di 20 cm.

La misura veniva eseguita mediante un ponte doppio di Thompson, della casa Hartmann e Braun, adatto per misure di resistenze piccole e piccolissime; detto strumento appartiene al laboratorio di elettrotecnica, al cui direttore prof. F. Lori facciamo i nostri migliori ringraziamenti. La temperatura era quella dell'ambiente, che durante le nostre esperienze non si scostò mai molto da + 15°.

Finite le misure, abbiamo tagliato dei campioni in diverse posizioni del tratto di 20 cm., su cui le misure stesse furono eseguite, e li abbiamo analizzati per avere la composizione esatta del filo: gr. 0,2909 di lega hanno dato gr. 0,1716 di rame, ossia 58,9 %, ciò che corrisponde presso a poco alla composizione della costantana comune.

Siccome, come è ben noto, il rame deposto elettroliticamente, non ostante ogni cura per avere un deposito compatto, ha sempre una resistenza maggiore di quello ricotto, in causa della minore compattezza, abbiamo voluto

renderci conto della intensità che questo effetto poteva avere nel nostro caso. Preso quindi un filo di rame ricotto di 0,5 mm. di diametro, lo abbiamo coperto elettroliticamente di uno strato di rame operando come sopra.

Il filo così ottenuto fu sottoposto a riscaldamento ed alla misura nello identico modo del filo rame-nichel. Abbiamo così ottenuto i seguenti risultati:

prima	del	riscaldamento:	resistenza:	0,0075	Ohm.
dopo	2	ore di riscaldamento	»	0,0068	»
»	6	»	»	0,0068	»
»	15	»	»	0,0068	»

Come era dunque da aspettarsi, dopo una lieve diminuzione di conduttività nelle prime ore, si ottiene un valore che rimane poi costante. Siccome il filo aveva un diametro esterno di 0,75 mm., dal valore costante si calcola come conduttività a + 15°: $64{,}03 \cdot 10^4$ rec-ohm; ciò che sta in ottimo accordo coi dati di Feussner (loc. cit.), che a 0° trova $65{,}03 \cdot 10^4$.

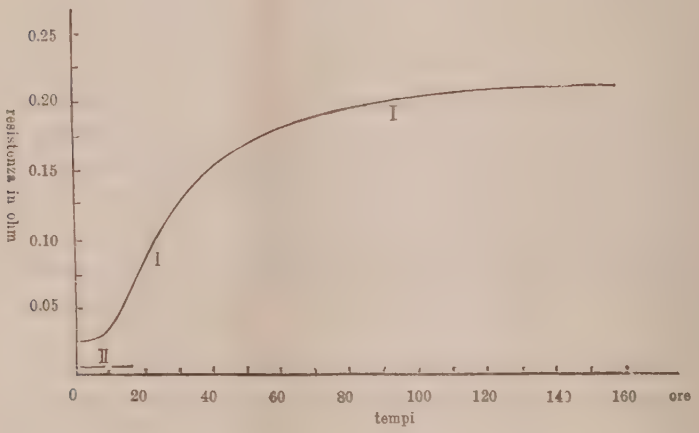
Col filo di nichel ramato venne prolungato il riscaldamento fino ad avere un valore costante, ed abbiamo avuto i risultati seguenti:

prima	del	riscaldamento:	resistenza:	0,0260	ohm.
dopo	2	ore di riscaldamento	»	0,0256	»
»	6	»	»	0,0279	»
»	10	»	»	0,0290	»
»	18	»	»	0,0723	»
»	34	»	»	0,1372	»
»	48	»	»	0,1641	»
»	70	»	»	0,1883	»
»	90	»	»	0,1980	»
»	115	»	»	0,2065	»
»	135	»	»	0,2097	»
»	157	»	»	0,2105	»

Come si vede, dopo una lievissima diminuzione nelle prime ore dovuta all'effetto del riscaldamento sullo strato superficiale elettrico, si ha un aumento dapprima lento, poi rapidissimo, quindi nuovamente rallentante fino ad aversi un valore costante enormemente superiore al primitivo. A questo punto il filo ha preso anche esteriormente l'aspetto della costantana. Che questa si sia formata in modo praticamente completo è dimostrato dal valore della resistenza a cui si giunge.

Infatti, siccome il filo ha un diametro esterno di 0,75 mm., si trova come conduttività a 15°: $2{,}07 \cdot 10^4$ rec. ohm, mentre Feussner, per una costantana al 58,61 % di rame, ossia quasi identica alla nostra, ottiene 2,0 a 0°.

Rappresentiamo l'andamento dei fenomeni sul diagramma qui unito in cui sulle ascisse sono portati i tempi e sulle ordinate le resistenze effettivamente osservate. La curva I rappresenta l'andamento del filo nichel-rame, il piccolo tratto II quello del filo rame-ramato. Come si vede l'andamento è regolare, almeno quanto si può aspettarsi da esperienze come queste che hanno necessariamente un carattere preliminare.



Infatti la misura del tempo non è rigorosa, non potendosi per esempio tener conto del tempo impiegato dal forno nel riscaldarsi e raffreddarsi ad ogni interruzione. Anche la temperatura durante il riscaldamento non si potè tenere tanto costante quanto sarebbe probabilmente necessario per poter trarre conclusioni quantitative sull'andamento del fenomeno.

Abbiamo così dimostrato, colla misura della resistenza elettrica, che i due metalli nichel e rame che dànno soluzioni solide in tutti i rapporti, possono formarle diffondendo l'uno nell'altro allo stato solido.

Abbiamo in corso altre esperienze:

1°, a differenti temperature per studiare l'influenza della temperatura;

2°, con filo a molti strati alternati dei due metalli per ricercare la influenza della maggiore o minore superficie di contatto;

3°, con le coppie rame-oro, argento-oro, che presentano fenomeni analoghi a quelli della coppia ora studiata.

Oltre alla conduttività elettrica, altre proprietà fisiche possono essere utilizzate per verificare la formazione di soluzioni solide per diffusione. Anche su questo punto comunicheremo presto risultati interessanti.

Chimica. — *Sulla preparazione e la fototropia di alcuni osazoni* (1). Nota II di M. Padoa e L. Santi, presentata dal Socio G. Ciamician.

Per proseguire, secondo i criterî esposti nella Nota precedente (2), lo studio della fototropia negli osazoni, abbiamo preparato altri di tali composti non noti finora; impiegando della m. tolilidrazina assai pura riuscimmo ad ottenere dei (β) m-tolilosazoni che sono, come quasi tutti gli altri, fototropi. Abbiamo pure preparato altri osazoni dell'anisile, e il β-naftilidrazone del piperile che riuscimmo a separare dal corrispondente osazone. Per alcuni osazoni abbiamo rilevato l'interessante proprietà di cristallizzare con un solvente (benzolo o cloroformio); notammo che gli osazoni puri, fototropi, non lo sono più nei composti d'addizione col solvente.

La m-tolilidrazina fu preparata dalla m-toluidina in modo analogo a quello che ci aveva servito per la preparazione delle altre due tolilidrazine (3).

1. — (β) *m-tolilosazone del benzile.*

$$\begin{array}{l} C_6H_5 . C = N . NH . C_6H_4 . CH_3 \\ \quad\quad | \\ C_6H_5 . C = N . NH . C_6H_4 . CH_3 \end{array}$$

È stato ottenuto bollendo a ricadere per un'ora una soluzione in acido acetico glaciale di 1 gr. di benzile e gr. 1,8 di m. tolilidrazina. Versando il prodotto della reazione nell'acqua, si separa una sostanza rossastra peciosa che dopo alcuni giorni indurisce. Questa si lava con alcool bollente e rimane una polvere giallo-chiara che cristallizza da una miscela di benzolo ed alcool in begli aghetti di color giallo canarino. Fonde a 163°.

Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	13,40	13,50

È debolmente fototropo, assumendo in alcuni minuti al sole una tinta leggermente più carica. La variazione è però tanto piccola che non si riesce a determinare un punto di scoloramento. Tuttavia si può osservare che al buio si scolora in due o tre giorni.

(1) Lavoro eseguito nel Laboratorio di Chimica generale della R. Università di Bologna.

(2) M. Padoa e L. Santi, Questi Rendiconti, 1910, II, 302.

(3) M. Bösler, Liebigs Annalen, *212*, 338.

2. — *(β) m. tolilosazone del piperile.*

$$CH_2O_2 : C_6H_3 . C = N . NH . C_6H_4 . CH_3$$
$$\quad\quad\quad

4. — *(β). β-naftilidrazone del piperile.*

$$CH_2O_2 : C_6H_3 . C = O$$
$$\vert$$
$$CH_2O_2 : C_6H_3 . C = N . NH . C_{10}H_7$$

Operando su maggiori quantità di sostanza, di quanto si era fatto nella preparazione dell'osazone descritto nella Nota precedente, abbiamo potuto isolare maggiori quantità dell'altro composto che notammo già formarsi contemporaneamente all'osazone, e purificarlo cristallizzandolo dall'alcool. È una minutissima polvere cristallina gialla che fonde a 162°. L'analisi dimostra che è l'idrazone:

	Calcolato	Trovato
N %	6,39	6,30

Esposto al sole passa lentamente a giallo più carico, ma non si può ritenere accertato che si tratti di fototropia, perchè al buio non retrocede o forse la retrocessione è mascherata da una lieve alterazione.

5. — *Composto di addizione del (β). β-naftilosazone del piperile col cloroformio.*

$$\begin{matrix} CH_2O_2 : C_6H_3 . C = N . NH . C_{10}H_7 \\ \vert \\ CH_2O_2 : C_6H_3 . C = N . NH . C_{10}H_7 \end{matrix} . CHCl_3$$

Il solvente adoperato per cristallizzare il β-naftilosazone del piperile (vedi Nota precedente) [1] era una miscela di alcool e cloroformio che diede allora buoni risultati. In una seconda preparazione si separò invece un olio bruno che andò trasformandosi in una sostanza cristallina gialla; usando molto solvente la cristallizzazione era immediata. Questa sostanza è evidentemente diversa dal primo osazone ottenuto; infatti *non è fototropa*, ma lo diventa se bollita con alcool; fonde a 80° svolgendo bollicine gassose, poi solidifica di nuovo per rifondere a 201°. E poichè l'osazone puro fonde a 207°, abbiamo pensato che si trattasse di un composto di addizione col cloroformio. Tale solvente può essere eliminato, ma lentissimamente, tenendo il composto nel vuoto a freddo; nella stufa a vuoto si ha un'alterazione anche a soli 60°. Tuttavia questo composto di addizione può essere seccato sul cloruro di calcio fino a peso costante, e allora pel suo contenuto di azoto dimostra contenere una molecola di cloroformio per una di osazone:

	Calcolato	Trovato
N %	8,03	8,30

[1] Questi Rendiconti, loc. cit.

L'alcool agisce sul composto di addizione e ne asporta il cloroformio, con che ricompare la fototropia.

6. — *(β) . β-naftilosazone dell'anisile.*

$$CH_3O . C_6H_4 . C = N . NH . C_{10}H_7$$
$$\vert$$
$$CH_3O . C_6H_4 . C = N . NH . C_{10}H_7$$

Lo abbiamo preparato bollendo una miscela di gr. 1 di anisile, gr. 2 di cloridrato di β-naftilidrazina e 50 cc. di alcool. Dopo circa un'ora si è separata già una notevole quantità di osazone che abbiamo filtrato all'ebollizione; abbiamo ripetuta l'operazione tre volte nello spazio di cinque ore, dopo di che non si è più separato nulla. Rendimento molto buono. L'osazone così grezzo è però cristallino, giallo; lavato con alcool bollente, nel benzolo si scioglie subito a freddo, per lasciar separare dopo pochi minuti il composto di addizione solubile all'ebollizione; per aggiunta di 2 volumi di alcool e distillazione di metà del liquido si ottiene l'osazone; non sempre però, perchè alcune volte si è invece separato il composto di addizione, da cui si ottiene facilmente l'osazone per ebollizione con alcool. L'osazone ottenuto per cristallizzazione da benzolo ed alcool si presenta in begli aghi riuniti in stellette di color giallo pallido. Anche con ripetute cristallizzazioni conserva un punto di fusione fra 165° e 169°. Vicino al punto di fusione assume una colorazione gialla intensa.

Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	10,18	10,17

È fototropo allo stato puro in un modo spiccatissimo, colorandosi al sole istantaneamente in rosso vino; dopo alcuni minuti raggiunge un rosso molto cupo. Al buio si scolora in pochi minuti. Il punto di scoloramento giace intorno ai 55°.

7. — *Composto di addizione del (β) . β-naftilosazone dell'anisile col benzolo.*

$$\begin{matrix} CH_3O . C_6H_4 . C = N . NH . C_{10}H_7 \\ \vert \\ CH_3O . C_6H_4 . C = N . NH . C_{10}H_7 \end{matrix} . C_6H_6$$

Si ottiene come fu detto in precedenza. Cristallizzato dal benzolo è polverulento finissimo, ma dal benzolo e alcool si ha in begli aghi. Il colore è bianco, ma presto ingiallisce alla superficie per sfiorimento (non si tratta di fototropia, perchè questa colorazione non retrocede nè al buio, nè col riscaldamento). Nel vuoto su paraffina diminuisce continuamente di peso, ma

molto lentamente. Nella stufa si altera; quello che resta però anche in questo caso è fototropo (non moltissimo). Basta però lavarlo con alcool perchè la fototropia diventi molto intensa. Fonde fra 155° e 158°.

Analisi:

	Calcolato	Trovato
N %	8,94	8,95

Come abbiamo già detto, *non è fototropo.*

8. — (β) . *o-tolilosazone dell'anisile.*

$$CH_3O . C_6H_4 . C = N . NH . C_6H_4 . CH_3$$
$$\quad\quad\quad

10. — *Composto di addizione del (β) . p-tolilosazone dell'anisile col benzolo.*

$$\begin{matrix} CH_3O\,.\,C_6H_4\,.\,C=N\,.\,NH\,.\,C_6H_4\,.\,CH_3 \\ \quad\quad\quad\

privo di azoto combinato; i risultati che ottenemmo dall'analisi dell'aria in cui erano vissute piante clorofilliane, sia inferiori sia superiori, ci avevano già permesso di generalizzare questa proprietà; ora i nuovi risultati analitici ottenuti da culture di specie diverse (*Acer Negundo, Solanum nigrum, Cucurbita Pepo, Raphanus sativus, Polygonum Fagopyrum*) confermano quelli precedentemente ottenuti, e ci permettono altresì di constatare in qualche caso un rapporto tra la quantità di azoto libero assimilato e la quantità di azoto combinato che la pianta poteva assorbire dal terreno.

Le culture delle specie su citate vennero ottenute da semi previamente sterilizzati con soluzioni adatte di acqua ossigenata, seminati in substrato nutritizio sterile esente di azoto o contenente una quantità nota di questo elemento. L'aria che circolava entro le grandi campane contenenti i recipienti di cultura, veniva resa sterile e privata dell'azoto ammoniacale, nitroso, nitrico e organico, col metodo già indicato.

Le piantine ottenute da questi semi venivano accuratamente pesate e analizzate.

La differenza tra l'azoto totale in esse contenuto e l'azoto contenuto nei semi, dava la quantità di azoto sottratto all'aria.

Nel caso in cui il substrato conteneva una quantità nota di un sale azotato, veniva fatta l'analisi, oltrechè del seme e della pianta, anche del substrato in cui la pianta aveva vissuto, e per differenza si otteneva la quantità di azoto assimilata dall'aria.

I metodi analitici comunemente adoperati per la ricerca dell'azoto nei vegetali sono: il metodo di Dumas, quello di Will e Warentrapp, e il metodo Kjeldahl. Nessuno di questi metodi è tuttavia applicabile, senza modificazioni, alla ricerca dell'azoto totale nei vegetali. Infatti il metodo Dumas, per quanto abbia il vantaggio della maggiore esattezza, ci permette di scomporre, per mezzo dell'ossido di rame, la sola sostanza organica, e non i composti salini: i nitrati, che sono contenuti in generale in tutti i vegetali, ed i nitriti, la cui presenza, benchè esclusa dal Berthelot (1), è ammessa da altri (2). Lo stesso dicasi del metodo Will e Warentrapp, che è inoltre poco esatto. Anche il metodo Kjeldahl, eseguito col semplice procedimento dettato dall'autore, permette di dosare solo l'azoto organico e l'azoto amidico, ma non è neppur certo che con questo metodo si riesca ad intaccare qualunque sostanza organica azotata, poichè ad es. gli alcaloidi e le nucleine vegetali hanno una costituzione così complessa che l'azoto in esse contenuto offre una grande resistenza alla riduzione in ammoniaca. Tuttavia il metodo Kjeldahl è suscettibile di modificazioni tali che permettono di scomporre e di dosare così l'azoto organico come quello minerale, sotto qualunque forma. Innumerevoli

(1) M. Berthelot, *Chimie végét. et agric.* Tome III, pag. 76.
(2) F. Czapek, *Biochemie der Pflanze*, II, pag. 208.

sono le modificazioni che vennero fatte al metodo Kjeldahl: noi applichiamo in tutte le nostre ricerche quantitative (su semi, piante, terreno) il metodo Kjeldahl modificato dal Joldbauer (1), che ci permette di dosare l'azoto totale sia organico, sia inorganico, anche in dosi minime.

Com'è noto, la modificazione consiste nell'aggiungere all'acido solforico concentrato che deve intaccare la sostanza, 2-3 cc. di acido fenolsolforico (ottenuto sciogliendo gr. 50 di fenolo in acido solforico concentrato fino ad ottenere 100 cc. di mescolanza), poi 2-3 gr. di polvere di zinco e 4-5 goccie di cloruro platinico contenenti gr. 0,04 di platino in 1 cc. di acqua.

Si ottiene con questo metodo la scomposizione completa di tutte le sostanze azotate, come dimostrano le analisi di prova fatte dall'autore stesso con sostanze diverse, e da noi ripetute con quantità note di nitrato e nitrito potassico, e di asparagina.

Il riscaldamento della sostanza per la trasformazione dei composti azotati in solfato di ammonio durava da 1-3 giorni, e cioè fino a che il liquido non diventava perfettamente incoloro; la distillazione avveniva nel solito modo e veniva prolungata per 2 $^1/_2$ 3 ore.

Distingueremo in due serie, le culture fatte seguendo il metodo sperimentale e analitico ora descritto, e cioè:

Serie I. — Culture di *Raphanus sativus*, di *Acer Negundo*, di *Cucurbita Pepo*, di *Polygonum Fagopyrum*, ottenute in substrato *esente di composti azotati.*

L'analisi delle piante rivelò notevoli aumenti d'azoto in confronto alla quantità contenuta nel seme, aumenti spiegabili con la completa astinenza di azoto combinato a cui queste piante erano costrette. Anche il loro sviluppo, relativamente alle condizioni in cui le piante crescevano, era notevole: fatto che si desume anche dai dati analitici qui riportati:

Raphanus sativus. — Dal 13 luglio al 14 settembre 1910:

Numero delle piante analizzate	12
Peso fresco	gr. 4,5240
» secco	» 0,7068
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,0238
» » » in 12 semi	» 0,0063
Aumento in azoto.	» 0,0175

(1) M. Jodlbauer, Chem. Centralblatt, 13 F. *17*, 433; e Zeitschr. f. analyt. Chemie, *26*, 92, (1887).

Raphanus sativus. — Dal 13 luglio al 30 settembre 1910:

Numero delle piante analizzate	12
Peso fresco	gr. 5,2940
» secco	» 0,8278
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,0308
» » » in 12 semi	» 0,0063
Aumento in azoto.	» 0,0245

Acer Negundo. — Dal 15 luglio al 5 ottobre 1910:

Numero delle piante analizzate	10
Peso fresco	gr. 5,90
» secco	» 1,0801
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,0224
» » » in 10 semi	» 0,0112
Aumento in azoto.	» 0,0112

Acer Negundo. — Dal 15 luglio al 1° novembre 1910:

Numero delle piante analizzate	6
Peso fresco	gr. 3,54
» secco	» 0,7975
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,0154
» » » in 6 semi.	» 0,0067
Aumento in azoto.	» 0,0087

Cucurbita Pepo. — Dal 5 agosto all'8 settembre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 7,51
» secco	» 0,6800
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,0147
» » » in 1 seme.	» 0,0133
Aumento in azoto.	» 0,0014

Cucurbita Pepo. — Dal 5 agosto al 27 settembre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 7,55
» secco	» 0,6827
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,0266
» » » in 1 seme	» 0,0133
Aumento in azoto.	» 0,0133

Cucurbita Pepo. — Dal 5 agosto al 18 ottobre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 7,85
» secco	» 1,2322
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,0308
» » » nel seme	» 0,0133
Aumento in azoto.	» 0,0175

Polygonum Fagopyrum. — Dal 7 settembre al 20 ottobre 1910:

Numero delle piante analizzate	15
Peso fresco	gr. 2,68
» secco	» 0,6147
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,0133
» » » in 15 semi	» 0,0039
Aumento in azoto.	» 0,0094

Serie II. — Culture di *Raphanus sativus*, di *Acer Negundo*, di *Cucurbita Pepo*, di *Solanum nigrum*, ottenute in substrato contenente una quantità nota di azoto combinato. Le analisi delle piante rivelarono anche in questo caso notevoli aumenti, variabili a seconda della quantità di azoto somministrata.

Servano di esempio i risultati seguenti:

Raphanus sativus. — Dal 15 giugno al 20 novembre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 4,00
» secco	» 0,6594
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,0301
» » » » soluzione somministrata	» 0,03069
Azoto totale rimasto nella sabbia	» 0,0091
» » contenuto in 1 seme	» 0,00053
Aumento in azoto.	» 0,00798

Acer Negundo. — Dal 15 luglio al 15 settembre 1910:

Numero delle piante analizzate	2
Peso fresco	gr. 2,25
» secco	» 0,5545
Azoto totale contenuto nelle piante	» 0,1624
» » » nella soluzione somministrata	» 0,1432
Azoto totale rimasto nella soluzione. . . .	» 0,0035
» » contenuto in 2 semi.	» 0,0022
Aumento in azoto.	» 0,0205

Cucurbita Pepo. — Dal 5 agosto al 1° novembre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 13,61
» secco	» 2,1250
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,04494
» » » » soluzione somministrata	» 0,02046
Azoto totale rimasto nella sabbia	» 0,0014
» » contenuto in 1 seme	» 0,0133
Aumento in azoto	» 0,01258

Cucurbita Pepo. — Dal 5 agosto al 5 novembre 1910:

Numero delle piante analizzate	1
Peso fresco	gr. 11,05
» secco	» 2,0875
Azoto totale contenuto nella pianta	» 0,0679
» » » » soluzione somministrata	» 0,02046
Azoto totale rimasto nella soluzione	» 0,0007
» » contenuto nel seme	» 0,0133
Aumento in azoto	» 0,03484

Solanum nigrum. — Riuniamo i dati di alcune analisi nel seguente specchietto:

Cultura	Peso fresco di 3 piante gr.	Peso secco di 3 piante gr.	Azoto totale contenuto nelle piante gr.	Azoto totale contenuto nella soluzione somministrata gr.	Azoto totale rimasto nella sabbia gr.	Azoto totale contenuto in 3 semi gr.	Aumento in azoto gr.
A	8,27	0,8930	0,0195	0,02046	0,0028	0,00006	0,0017
B	8,06	0,8819	0,03192	0,02046	0,01203	0,00006	0,0234
C	8,87	0,9905	0,0507	0,02046	0,0000	0,00006	0,0306
D	26,15	3,5140	0,0294	0,04092	0,0224	0,00006	0,0108
E(1)	13,21	1,4730	0,0735	0,0864	0,0168	0,00006	0,0039

Dalla comparazione di questi risultati si deduce che le culture che ricevettero una maggiore quantità di azoto diedero una minore quantità di

(1) Si noti che, mentre le culture A, B, C, D ricevettero l'azoto sotto forma di nitrato di calcio, la cultura E lo ricevette sotto forma di fosfato d'ammonio bibasico, e di nitrato potassico.

azoto libero assimilato, perchè nella sabbia (o nella soluzione residuo) restava ancora una certa quantità di azoto combinato: mentre le culture che ricevettero meno azoto e che lo assimilarono in gran parte (lasciando nella sabbia poco o nullo residuo), diedero una quantità di azoto libero assimilato maggiore.

Dal complesso delle nostre esperienze noi crediamo dunque di poter concludere che la facoltà di assimilare l'azoto atmosferico libero è proprietà assai più diffusa di quanto fino ad ora si ammetteva, ed è presumibile che tutti i vegetali, dalle alghe alle fanerogame, possano, in condizioni speciali, far uso con maggiore o minore attività di questo potere. Come tale assorbimento avvenga, e quale sia, e se esista un organo specifico che adempia a questa funzione, non ci è noto; certo è che non si può accettare, allo stato attuale delle nostre conoscenze, la teoria dei « generatori di albumina » emessa dal Jamieson (1). Ma è pur certo che, a prescindere anche da qualunque risultato sperimentale, è fisiologicamente ammissibile che la cellula vegetale clorofilliana, sede di molte altre, forti e complesse reazioni chimiche (in parte a noi ancora ignote), compia anche quella della fissazione dell'azoto libero. Inoltre, le moderne teorie sulla catalisi, sulle sostanze colloidali e sugli enzimi (così comuni nelle cellule vegetali), ci permettono di ammettere che il fenomeno della fissazione dell'azoto libero per parte delle cellule delle piante superiori, possa avvenire per combinazione diretta dell'azoto con l'idrogeno nascente, per dar luogo alla formazione di un composto azotato, primo prodotto della sintesi degli albuminoidi.

All'infuori della cellula vegetale infatti, questa combinazione venne ottenuta già da varî anni dal Loew, che in presenza della spugna di platino o di altre sostanze catalizzanti ottenne, in ambiente esente di composti azotati, la fissazione dell'azoto libero, con produzione di nitrati. Recentemente poi il prof. Haber di Karlsruhe è riuscito a dare un'applicazione pratica a questa sintesi, mettendo una miscela di idrogeno e di azoto in presenza di uranio finemente diviso.

In modo analogo potrebbe, secondo noi, avvenire la fissazione dell'azoto libero nel plasma vegetale vivente. Ad ogni modo, che tale fissazione in realtà avvenga, a noi sembra dimostrato dalle nostre esperienze.

Che tuttavia molte specie non possano rinunziare all'azoto combinato che trovano da lungo tempo e in gran quantità nel terreno, è cosa naturale. È chiaro che se si somministra per anni ed anni di seguito, ad una data specie, un eccesso di sostanze azotate, in modo da ottenerne da parte della pianta la graduale assimilazione, non potremo poi pretendere da quella stessa

(1) T. Jamieson, *Utilisation of nitrogen in air by plants* (Agricultur Research Association, 1905-1908).

specie che, non solo si sviluppi in assenza di quella sovrabbondanza di nutrimento a cui si era adattata, ma che trasformi totalmente il suo modo di vita, e adatti le proprie cellule in modo da assimilare un elemento libero, allo stato gasoso, anzichè lo stesso combinato sotto forma di sale inorganico e disciolto.

Ma è naturale altresì che esistano piante dotate di uno speciale potere di assimilabilità dell'azoto libero, delle vere accumulatrici di azoto, di cui forse col tempo potremo rendere, con mezzi adatti, più remunerativa la coltivazione. In tal modo il problema dell'assimilazione dell'azoto libero, studiato nei suoi particolari, potrà avere una grande importanza, oltre che nel campo puramente scientifico, anche in quello dell'agricoltura pratica.

Patologia vegetale. — *Intorno allo svernamento di alcune Erisifacee.* Nota del dott. Vittorio Peglion, presentata dal Socio G. Cuboni.

Colla ripresa della vegetazione ho potuto completare le osservazioni intorno all'*Oidium quercinum* Thüm. per quanto ha attinenza collo svernamento di questo parassita allo stato conidiale nelle gemme della quercia. Già l'esame metodico di parecchie centinaia di gemme allo stato di riposo, provenienti da alberi crescenti in diverse località, mi aveva fornito resultati positivi: un limitato numero di esse presentava un'infezione diffusa, così come le gemme staccate dalle piantine di quercia ricoverate durante la scorsa invernata nella serra della R. Scuola Superiore di Agraria di Bologna. Tuttavia, la migliore conferma alle conclusioni esposte nella mia precedente Nota è venuta dalle indagini compiute di mano in mano che le quercie entravano in vegetazione. Ho raccolto ormai numerosissimi germogli infetti disseminati saltuariamente in mezzo alla rigogliosa vegetazione spuntata nel volgere di pochi giorni sulle annose quercie che si trovano nei dintorni di Ferrara.

I germogli infetti sono interamente ricoperti dalla caratteristica efflorescenza bianca, che ne rende facile la scoperta in mezzo al verde tenero delle nuove cacciate. Essi si rinvengono di preferenza sulle ramificazioni cespugliose che si trovano lungo i fusti non debitamente governati.

Accade in aperta campagna lo stesso fenomeno segnalato nella precedente Nota: l'infezione resta cioè circoscritta per parecchi giorni ai germogli dischiusisi infetti, nonostante che sulla trama miceliale si trovino conidiofori che disseminano in giro numerosi conidi perfettamente maturi ed atti a germinare. Anzi negli ammassi di conidi che formano rivestimento polverulento alla superficie degli organi infetti, è facile osservarne non pochi in via di germinazione.

Resta pertanto stabilito che anche in aperta campagna l'oidio della quercia si conserva da un anno all'altro vivendo parassitariamente nelle gemme.

Aggiungo ora che nella serra, dopo un periodo di incubazione durato per oltre una ventina di giorni, l'infezione si è poscia diffusa con tale violenza da costringere ad eseguire una solforazione per porvi argine ed impedire che la vegetazione delle giovani quercie fosse compromessa. Non occorre aggiungere che, in tali condizioni d'ambiente, l'applicazione dello zolfo ha consentito di soffocare radicalmente e rapidamente l'infezione.

È probabile che non poche altre specie di erisifacee, oltre all'*Oidium quercinum* ed all'oidio della vite, svernino allo stato conidiale nelle gemme dell'ospite: posso confermarlo intanto per altre due specie, e cioè l'oidio del Melo e l'oidio delle Rose.

La forma conidiale (*Oidium farinosum* Cook) del parassita del Melo è assai diffusa nei frutteti della regione del Basso Emiliano; è noto che di recente il Laubert (1) ne ha scoperti i periteci nei pometi di Dahlem, identificandoli colla *Podosphaera leucotricha* Salm.; pur rilevando il significato biologico inerente alla constatata fruttificazione ascofora di questo parassita, lo stesso Laubert ammette in massima che esso possa, al pari di altre erisifacee, svernare per mezzo di miceli ricoverati nelle gemme. Le accurate riproduzioni fotografiche di germogli interamente infetti, intercalate nel testo dell'interessante lavoro di Laubert, lasciano appunto supporre che essi provengano dallo svolgimento di gemme infette. Anche von Tuboeuf (2) riporta un caso di svernamento dell'oidio nelle gemme di una pianta di Melo ricoverata in una serra.

A me non si è mai presentata l'opportunità di osservare i periteci dell'oidio del Melo in questa regione: tuttavia, mi risulta da osservazioni continuate da qualche anno dal dott. A. Manaresi che questo parassita si manifesta regolarmente in qualche frutteto dei dintorni di Bologna ed Imola; questa primavera, l'ho riscontrato diffusissimo nei pometi dei dintorni di Ferrara. Le osservazioni compiute in queste differenti località consentono di affermare che l'oidio del Melo sverna precisamente nelle gemme dell'ospite. Esso si rinviene tanto in gemme foglifere che miste. La faccia interna delle squame e soprattutto poi foglie, peduncoli e fiori sono uniformemente ricoperti dalla fitta rete miceliale, da cui si differenziano i caratteristici conidiofori. Ogni conidioforo che raggiunge all'incirca 110 μ di lunghezza segmentandosi, dà origine a 4-6 conidi, che misurano 24-37 $\times$ 15-17 μ.

I getti infetti si riconoscono abbastanza agevolmente poichè, invece della colorazione bianco-argentina dovuta allo spesso tricoma che ne av-

(1) Laubert, *Der echte Mehlthau des Apfelb.* Deutsch. Land. Presse 1908, pag. 628.

(2) Von Tuboeuf C., *Beobacht. d. Ueberwinter. von Pflanzenparas.* Naturwissensch. Zeitschr. 8 Iahrg. 1910, heft 1, pag. 57.

volge i singoli organi, si presentano di colore bianco smorto, quasi bigio. L'infezione, quando sia diffusa nella proporzione avvertita in alcuni alberi del frutteto della Montagnola, diventa una vera calamità, poichè i getti colpiti, oltre a fungere da centri di infezione primaria, subiscono anche una non trascurabile caduta di fiori. Epperò ho fatto eseguire forti solforazioni allo scopo di arrestare l'infezione stessa e giudicare, per quanto sarà possibile e mediante opportuni confronti, quale sia l'entità del danno in seguito al libero dilagare dell'oidio.

Veniamo finalmente all'oidio delle rose: come osserva il Pollacci (1), in Italia questa specie si rinviene quasi sempre allo stato conidiale (*Oidium leucoconium* Desm.); qualche anno fa venne segnalata da Cuboni e Petri (2) la forma ascofora (*Spærotheca pannosa*) sviluppatasi su rametti di pesco colpiti dal cosidetto *bianco*; di fronte alla diffusione che rende questo parassita una delle maggiori avversità delle rose, si può ritenere che la formazione dei periteci sia davvero un fatto eccezionale. Orbene procedendo il 12 aprile u. s. all'esame delle prime tracce d'infezione comparse quasi simultaneamente alla schiusura delle gemme, su delle rose riferibili alle varietà Maréchal Niel, Marie Henriette, Vittorio Emanuele, — che si dimostrano più specialmente soggette al *bianco* — ho potuto accertarmi che la *Sphaeretheca pannosa* è da annoverarsi fra i parassiti capaci di svernare anche, se non precipuamente, per mezzo di formazioni miceliali ricoverate nelle gemme. Premetto che anche in questa circostanza le più scrupolose indagini rivolte alla ricerca dei periteci sui rami e sugli avanzi foliari ebbero risultato negativo. Lungo i rami stessi ho raccolto germogli formati da 2-3 foglie uniformemente ricoperte da trama miceliale e conidiofori di *Oidium leucoconium*; germogli fioriferi nei quali le foglie sono irregolarmente cosparse da macchie oidiali ed i bottoni fiorali ancora ermeticamente chiusi — in taluni esemplari tuttora inclusi nella stipola — nelle sezioni longitudinali mostrano la faccia interna dei sepali, coperta da un fitto tricoma bianco in mezzo al quale serpeggia il micelio da cui si distaccano numerosi i caratteristici conidiofori dell'oidio anzidetto.

Anche in questo caso, l'infezione resta per qualche tempo circoscritta in questi centri primarî, donde poi divampa all'intorno colla ben nota virulenza.

Ho riunito queste osservazioni sommarie a sostegno dei concetti di recente espressi da Ewert (3) circa l'importanza che si deve attribuire alle

(1) Pollacci G., *Monografia delle Erisifacee italiane*. Atti R. Ist. Bot. Un. Pavia, 1907.

(2) Cuboni G. e Petri L. Rend. Acc. Lincei, XVIII, 1909.

(3) Ewert, R., *Die Uberwinter. von Sommerkon path Ascomyc.* Zeitsch. f. Pflans, 1910, 129.

forme conidiali estive, per quanto ha attinenza collo svernamento dei parassiti, non limitandone però la portata alle sole specie che raramente differenziano fruttificazioni ascofore, ma attribuendovi, come opina Hecke [1] un significato biologico assai più ampio.

Batteriologia agraria. — *Sopra la microflora della campagna romana* [2]. Nota di R. Perotti, presentata dal Socio G. Cuboni.

Lo studio della microflora della campagna di Roma è uno di quei che anche nella preparazione delle leggi di bonifica dell'agro romano venne completamente trascurato. Di ciò peraltro non può essere fatta colpa ad alcuno in quanto che la conoscenza del valore che alla microflora stessa spetta nella coltivazione dei campi è molto recente, più recente anzi dei provvedimenti fondamentali che si vollero decretare per il risorgimento economico del nostro agro.

Il primo lavoro di batteriologia riguardante i terreni circondanti la città di Roma, i quali si presentano invero in condizioni alquanto singolari, fu eseguito dal Faelli nell'estate e nell'autunno dell'anno 1903 [3]. Con esso si venne alla conclusione che le *tufarine*, le *pozzolanelle* e le argille plioceniche sono ricchissime di microrganismi, fra i quali si contano micrococchi, bacilli fermenti dell'urea, protei, sarcine; che il numero dei microrganismi stessi è minore alla superficie che non a 30 cm. e diminuisce approfondendo di più la presa del campione; che il 15 % all'incirca è costituito da ifomiceti e saccaromiceti.

Solo due anni appresso venne in luce un mio primo studio sopra i batteri oligo- e mesonitrofili della campagna romana, del quale riferii a questa stessa Accademia [4], e nel quale misi in evidenza la diffusione e la importanza che i batteri fissatori di azoto posseggono nei nostri terreni in relazione particolarmente alla locale e vecchia pratica del maggese. Una ulteriore illustrazione della batteriologia della campagna romana fu l'altro mio lavoro

(1) Hecke, L. *Beob. uber Ueberwinterung von Pflanz. paras.* Nat. wissensch. Zeitschr. 1911, h. 1.

(2) Lavoro eseguito nel Laboratorio di batteriologia agraria della R. Stazione di Patologia vegetale di Roma.

(3) G. Faelli; *Ricerche di batteriologia agraria fatte nell'agro romano.* Archivio di farm. sperim., III, 1904.

(4) R. Perotti, *Batteri oligo- e mesonitrofili della campagna romana.* Rend. Accad. Lincei, XIV, 2° sem., fasc. 11, pag. 623.

sopra lo *Pseudomonas leuconitrophylus* n. sp. in essa diffuso e da me stesso descritto (1).

Gli altri miei studî sopra il movimento del capitale-azoto nei terreni della campagna romana (2) e sopra i metodi di misura delle attività microbiche da me praticati (3), sono ulteriori contribuzioni alla conoscenza della microflora dell'agro in quanto si riferiscono alla funzionalità di essa in relazione alle proprietà fondamentali che un terreno atto alla coltivazione deve presentare.

Nelle mie ricerche sopra la biologia dell'agro ho voluto però prendere in esame la microflora molto più da vicino, avendo fin da principio sospettato che la naturale e attitudini di essa, non solo avrebbero potuto illuminarci sopra il fondamento naturale delle pratiche già in uso nella campagna romana, ma avrebbero anche permesso di trarre conclusioni a vantaggio delle misure di bonifica eventualmente da adottarsi. Condussi le ricerche stesse per l'intero anno 1910 ottenendo così risultati che sono la espressione non solo delle proprietà dei differenti terreni della caratteristica ed importante regione, ma anche dei varî momenti dell'intero ciclo annuo delle vicende atmosferiche.

Anzitutto volli indagare sopra il contenuto quantitativo dei batteri dei terreni dell'agro ed intorno alle variazioni che il numero di essi presenta con la diversa natura del suolo, con i lavori, ecc. In tale ordine di ricerche feci largo uso del mio agar all'estratto di torba, di cui avevo già più volte sperimentata l'efficacia (4). La coltivazione fu fatta a temperatura ambiente e la conta eseguita dopo 20 giorni dalla data di allestimento delle culture, in doppia prova per ogni campione di terra.

Riporto qui appresso alcuni dati scelti fra i moltissimi ottenuti nello intero anno decorso.

(1) R. Perotti, *Su una nuova specie di bacteri oligonitrofili*. Annali di Botanica, vol. IV, fasc. 3°.

(2) R. Perotti, *Il movimento del capitale-azoto nei terreni della campagna romana*. Rend. Acc. Lincei, vor. XIX, 2° sem., fasc. 12, pag. 671.

(3) R. Perotti, *Sopra i metodi di misura delle attività microbiche del terreno agrario*. Rend. Acc. Lincei, vol. XX, 1° sem., fasc. 4, pag. 266.

(4) R. Perotti, *Per l'esame bacteriologico-agrario del terreno*. Rend. Acc. Lincei, vol. XVI, 1° sem., fasc. 1, pag. 67.

Numero dei germi per centimetro cubo di terra.

Profondità — cm.	Gennaio	Febbraio	Marzo	Aprile	Maggio	Giugno	Luglio	Agosto	Settembre	Ottobre	Novembre	Dicembre	*Osservazioni*
10	15.500		100.500	95.000							72 500		Altipiano (tufarine), prato naturale.
20	18.500		25.000	25.000							85.000		
35	28.500		17.000	—							—		
50	—		—	40.500									
10	48.000						43.500	99.500					Altipiano (tufarine) coltivato a frumento, non concimato.
20	11.500						34.200	56.500					
35	—						42.500	41.500					
50	—						—	—					
10		155.000						68.500			119.000		Valle di altipiano (tufarine) coltivata a frumento, non concimata.
20		17.000						76.500			200.500		
35		—						—			85.000		
50		12.500						72.500			—		
10													Spallette (tufo), incolto.
20											39.500		
35											21.000		
50											—		
10	175.000			57.500					262.500				Altipiano (pozzolanelle), prato naturale.
20	25.500			15.000					195.200				
35	—			15.000					35.000				
50	87.500			—					—				
10					75,500				200.000				Altipiano (pozzolanelle) coltivato a frumento, non concimato.
20					90.000				280.000				
35					—				25.000				
50					37.500				—				
10		100.000								165 000			Valle di altipiano (pozzolanelle) prato naturale.
20		170.000								57.500			
35		—								73.500			
50		250.000								—			
10	117.000	210.000										14.500	Valle dell'Aniene (terreno argilloso-calcare), prato naturale.
20	64.000	180.500										13.250	
35	73.000	200.000										—	
50	—	—										82.500	
10	178.000											420.000	Valle dell'Aniene coltivata a frumento, non concimata.
20	140.000											130.000	
35	—											—	
50	145.000											35.250	
10			340.000										Valle del Tevere (terreno ar-
20			340.000										

L'esame di queste cifre permette molte conclusioni:

Anzitutto, in quanto a ricchezza di germi, si rileva che occupano il primo posto i terreni della valle del Tevere e dell'Aniene; alquanto dietro vengono tutti gli altri terreni dell'agro, fra i quali, tuttavia, per maggior numero di germi, primeggiano gli altipiani di pozzolanelle e le valli di altipiano di tufarine. Sulle spallette il contenuto dei germi è assolutamente basso. In linea generale, si osserva una grande differenza tra il numero dei microrganismi dei terreni lavorati e di quelli lasciati a prato naturale. I lavori favoriscono notevolmente la moltiplicazione dei germi anche nelle nostre terre. In alcuni casi, il numero ha superato anche i due milioni per centimetro cubo, cifra che non si raggiunge molto frequentemente.

Circa le variazioni quantitative del contenuto batterico con l'avvicendamento delle stagioni, troviamo il fatto dell'aumento dei germi nel periodo invernale, decorrente dal settembre al marzo; in quanto però alla distribuzione con la profondità, dobbiamo constatare irregolarità frequenti. In linea di massima mi sembra che non possa affermarsi la circostanza che nei nostri terreni, nelle profondità medie (cm. 30-35) si abbia il maggior numero di batteri. Vi sono molti casi nei quali troviamo le cifre più elevate a cm. 50, come ve ne sono molti altri nei quali le stesse cifre elevate si trovano alquanto più in alto. Nelle tufarine, ad es., che formano in genere terreni poco potenti e che si disseccano facilmente, si ha il maggior numero di microrganismi negli strati profondi.

Altre ricerche furono da me eseguite sopra la microflora della campagna romana a mezzo dell'esame quantitativo.

Procedetti all'isolamento ed alla identificazione delle specie sviluppantesi non solo sopra le piastre all'agar di torba, già usate per la numerazione dei germi, ma anche di quelle sviluppantesi nelle soluzioni selezionanti servite alla misura dei poteri di ammonizzazione, nitrificazione, denitrificazione e di fissazione dell'azoto della quale ho riferito nelle mie precedenti Note. Per lo studio mi valsi quindi anche di agar nutritivo al peptone, di gelatina, di agar di fagiuoli e di agar Beyerinck alla mannite.

Sopra i substrati al peptone ottenni singolare sviluppo di *Bac. fluorescens liquefaciens* con molte varietà, di *Bac. fluorescens putridus* (Flugge) e più raramente di *Bac. piocyanens* e di qualche *Proteus*. Sopra il substrato preparato con brodo di fagiuoli, ottenni con prevalenza sviluppo di *Bac. subtilis, Bac. denitrificans, Bac. megatherium, Sarcina lutea, S. aurantiaca, Bac. violaceus, Ascobacterium luteum*: sopra l'agar Beyerinck ottenni sviluppo del mio *Pseudomonas leuconitrophylus* e di altre forme particolarmente adattate a substrati magri riferentisi al *Bac. fluorescens liquefaciens*, nonchè dell'*Azotobacter chrooccocum*. Sopra l'agar all'estratto di torba osservai una equa rappresentanza di quasi tutte le sopraríferite forme e di più

un ricco sviluppo di ifomiceti, tra cui: *Mucor mucedo, Penicillium glaucum, Aspergillus niger, Fusarium roseum, Cladosporium*, ecc.

La concordanza dei risultati di non poche osservazioni fatte, mi permette di affermare alcuni fatti che non ritengo privi d'importanza per la conoscenza della distribuzione delle specie microrganiche nell'agro romano in relazione alle differenti proprietà dei terreni di esso ed alle diverse influenze esterne che i medesimi sono costretti a subire.

Da innesti con campioni di pozzolanelle si ottengono, con una certa prevalenza, forme batteriche; da innesti con campioni di tufarine si ottengono, invece, molto più abbondanti le forme ifomicetiche. Il rapporto numerico fra queste due categorie di microrganismi, che nei riguardi agronomici hanno una differente importanza, varia del resto alquanto con le epoche dell'anno. Se inverno le forme miceliche rappresentano il 15-20 % delle specie sviluppatesi sopra l'intera pianta, in estate esse possono raggiungere fino il 90-95 %, mentre la residua frazione è costituita quasi esclusivamente da *Bac. subtilis*. Tale circostanza attesta che in estate i terreni della campagna romana possono godere di proprietà microrganiche molto differenti da quelle che si hanno in inverno; essa si nota a partire dal mese di aprile e perdura, più o meno accentuata, fino al mese di settembre.

La specie che nei terreni del nostro agro mi è fin qui risultata essere fra quelle che posseggono la maggiore importanza è il *Bac. fluorescens liquefaciens*. Esso, non solo ha una diffusione più che ordinaria, essendo particolarmente in grado di sostenere nelle condizioni locali la concorrenza vitale di tutte le altre forme, ma presenta anche un grande numero di varietà, le quali fanno passaggio a quel *Pseudomonas leuconitrophylus*, che io ho tempo fa descritto come forma oligonitrofila importante per la nostra campagna e che contribuisce a rendere questa un ambiente dove la oligonitrofilia possa sfruttarsi con vantaggio economico.

Fisiologia. — *Contributo alla biologia degli Enzimi. Sulla azione delle lipasi.* Nota di Sabato Visco, presentata dal Socio L. Luciani.

Botanica. — *Esperienze sulla disinfezione delle piante.* Nota II dei dott. L. Danesi e M. Topi, presentata dal Socio B. Grassi.

Queste Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

RELAZIONI DI COMMISSIONI

Il Corrisp. Viola, relatore, a nome anche del Socio Struever, legge una Relazione colla quale si propone la inserzione nei volumi accademici, della Memoria del dott. G. Ponte, intitolata: *Studii sull'eruzione etnèa del 1910.* Parte prima.

Eguale proposta fanno i Soci De Stefani, relatore, e Bassani, per il lavoro del prof. A. Martelli, dal titolo: *Osservazioni geologiche sugli Acrocerauni e sui dintorni di Valona.*

Le conclusioni delle Commissioni esaminatrici, messe ai voti dal Presidente, sono approvate dalla Classe, salvo le consuete riserve.

PERSONALE ACCADEMICO

Commemorazione del Socio straniero Federico von Recklinghausen, letta dal Socio E. Marchiafava:

Ringrazio il nostro Presidente di avermi dato l'onorifico incarico di commemorare il prof. Federico von Recklinghausen, socio corrispondente estero, perchè a lui mi legavano, come ora alla sua memoria mi legano, sentimenti di riconoscenza per la ospitalità, onde mi fu largo nell'anno 1875, nel suo Istituto di Strasburgo, ove aveva ricevuto la stessa cordiale accoglienza il nostro Socio professore senatore Foà, e come poi l'ebbero altri giovani medici italiani, che vi andarono chiamati dalla fama dell'insigne maestro.

Federico von Recklinghausen, spento serenamente nell'età di 76 anni, dopo la morte di Virchow, era il Nestore dei patologi tedeschi. Cominciò la carriera scientifica in Berlino, in quell'epoca memorabile per la medicina, nella quale un uomo di genio, Rodolfo Virchow, che chiamava il nostro Morgagni, il grande Maestro, aveva attirato l'attenzione di tutti i medici nazionali ed esteri con la nuova dottrina della patologia cellulare, e la medicina, uscita dalle pastoie dei sistemi fondati meno sopra l'osservazione e l'esperienza che sopra le speculazioni, rispettati i tesori raccolti per opera di osservatori intelligenti e sagaci dall'esperienza clinica, entrava finalmente, come voleva Bichat, nell'orbita delle scienze naturali, e additava la via di un progresso veramente positivo, onde le conquiste meravigliose per la scienza ed utili per l'umanità raggiunte in poco più di mezzo secolo.

Fu in quel tempo che Virchow riconobbe nel giovine Federico von Recklinghausen, una intelligenza penetrante, una iniziativa operosa, l'alto sentimento del dovere e lo ammise nel suo Istituto.

Dopo aver passato sei anni nell'Istituto patologico di Berlino, insegnò a Könisberg, poi a Würzburg e da ultimo nella Università di Strasburgo, ove rimase fino a quando ne divenne professore emerito.

I primi lavori che lo fecero conoscere nel mondo scientifico medico furono eseguiti negli anni 1862 e 1863.

Due riguardano la struttura del tessuto connettivo, il quale secondo Virchow, occupava un posto importante nella patologia cellulare. In uno: *I vasi linfatici e la loro connessione con il tessuto connettivo*, studiò particolarmente i canalicoli del succo: *Saftkänalchen*, che, scavati senza pareti proprie nei varî tessuti connettivi, sono in comunicazione con i vasellini linfatici per gli stòmi della membrana endoteliale, nella quale egli dimostrò i limiti delle cellule endoteliali con il trattamento al nitrato di argento. In questo lavoro egli dà una interpretazione della struttura delle cellule connettive diversa da quella che ne aveva data il suo Maestro.

Nell'altro: *Il riassorbimento dei grassi*, il primo lavoro sperimentale sopra questo argomento, dimostrò che i grassi e le emulsioni di sostanze coloranti introdotti nel peritoneo sono rapidamente assorbiti per le piccole aperture delle membrane endoteliale della superficie inferiore del diaframma dai linfatici del centro tendineo e trasportati in quelli della superficie toracica. Questo studio, che fu poi ripreso e ampliato da ricercatori italiani, è pieno d'interesse per i processi del riassorbimento.

Nel terzo dei suoi primi lavori: *Sopra il pus e i corpuscoli del tessuto connettivo*, notabile per la dottrina della Flogosi, dimostrò che le cellule del tessuto connettivo identiche alle cellule bianche del sangue e alle cellule del pus, sono cellule rotonde capaci di migrare negli spazî linfatici per virtù dei loro movimenti ameboidi, che egli potè studiare per lungo tempo con l'esame microscopico in una camera umida da lui costruita. Questa scoperta aprì forse la strada all'altra della fuoruscita delle cellule bianche dai vasi sanguigni fatta pochi anni dopo nello stesso Istituto da Giulio Cohnheim.

Ai lavori ora ricordati che portarono un contributo alla dottrina cellulare del Maestro, seguirono numerosi altri che sarebbe lungo esaminare anche brevemente. Ne ricorderò alcuni: l'Esostosi multiple; gli Encondromi multipli; la Ranula; la Neurofibromatosi della pelle chiamata anche la malattia di Recklinghausen; l'Embolia venosa e il trasporto retrogrado nelle vene e nei linfatici; la Spina bifida; la Carcinomatosi osteoplastica dello scheletro; gli Adenomiomi dell'utero e delle trombe; la Osteite fibrosa. Tutti sono eseguiti con tecnica semplice, ma inappuntabile, con critica severa; e in tutti si trovano fatti nuovi, interpretazioni nuove di fatti noti, vedute originali, germi di future ricerche, di discussioni proficue.

Oltre i lavori di anatomia patologica speciale, egli pubblicò nel 1883 il suo ben noto e grande *Trattato di Patologia generale della circolazione e della nutrizione*, nel quale è raccolta la dottrina completa delle alterazioni della circolazione, della flogosi, delle degenerazioni e della febbre. In questo trattato, che sarà sempre consultato da coloro, che vorranno conoscere lo stato della scienza patologica fino a quell'epoca, sono egualmente fatti e idee originali, in modo speciale nei capitoli della trombosi, della stasi, della degenerazione grassa, della jalinosi.

L'attività didattica di F. v. R. non si rallentò mai: egli insegnava con ardore e con fervore. Io ricordo che egli stesso, sebbene circondato da valorosi assistenti come Friedländer e Zahn, si occupava di tutti i preparativi per le lezioni dimostrative, e che alle sue lezioni, con gli studenti, assistevano numerosi medici desiderosi di conoscere dalla bocca del grande maestro i progressi della scienza.

Per F. v. R. la ricerca scientifica non era soltanto il dovere, ma anche la vera gioia e quasi la condizione indispensabile della sua esistenza. Nel 1891 cominciò le sue ricerche sopra la patologia delle ossa e in particolare sopra la rachite e la osteomalacia, concentrandosi in questo studio nelle ferie, poichè nei mesi di lezione quasi tutta la sua attività era per l'insegnamento. Nel 1905 per sua volontà, divenuto professore emerito, non si prese il meritato riposo o volse la sua mente ad altri studî, ma domandò un posto nell'Istituto da lui fondato e del quale era stato per tanti anni il decoro, per continuarvi le sue indagini sopra la rachite e la osteomalacia e vi si dedicò dalla mattina alla sera, stimolato dal pensiero che la tarda età poco tempo gli avrebbe consentito ancora; onde la necessità di far procedere rapidamente il lavoro, il cui compimento era ormai per lui un sacro dovere.

E quando cominciarono i primi sintomi di quella debolezza del cuore, alla quale doveva presto soccombere, egli presago della prossima fine, raccolse con ferma volontà tutte le forze che gli rimanevano, perseverò in quel lavoro e potè terminarlo prima di morire. Non potè sciogliere il voto da lungo tempo fatto di presentarlo alla Università Federico Guglielmo di Berlino, la sua *Alma Mater*, durante le feste del Centenario della fondazione; ma il suo figlio che curò la pubblicazione della grande opera, la più grande sopra l'argomento trattato (un volume di 573 pagine e un magnifico atlante di 43 tavole) ne scrisse la dedica, come un legato, a quella Università secondo il desiderio del padre.

F. v. R. alle doti d'insigne scienziato univa quelle di un carattere elevato e leale, di una bontà attiva, di un tatto fine e delicato. Nella città di Strasburgo, dove egli andò quando ancora non era spento l'eco delle grandi battaglie, le sue belle qualità furono feconde di una influenza nobilmente pacificatrice. Una prova solenne della stima dell'affetto e della riconoscenza

delle generazioni dei medici, che si succedettero nei 34 anni del suo insegnamento è la fondazione, che porta il suo nome, destinata ad incoraggiare le ricerche scientifiche, istituita con le contribuzioni dei medici e dei professori che gli furono discepoli. E questo fu un omaggio meritato da F. v. R. che per tutta la vita rimase fedele alla scienza e il cui nome per le sue opere rimarrà nella storia della Medicina.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario Millosevich presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle inviate dai Soci: Taramelli, Berlese e Silvestri. A nome poi del Corrisp. on. Cardani fa omaggio di un lavoro a stampa del prof. G. Bernardi, avente per titolo: *Tavole contenenti i doppi, i quadrati, i tripli dei quadrati ed i cubi dei numeri interi da 1 a 1000* ecc.

Il Segretario Grassi fa omaggio dell'opera del dott. D. Giordano, intitolata: *Trattato di Chirurgia: appendice 2ª: Compendio di Chirurgia operatoria italiana*, di cui segnala la dottrina e la importanza.

Il Socio Nasini offre una copia del suo discorso: *La Teoria atomica e l'opera di Stanislao Cannizzaro*, pronunciato alla 4ª riunione della Società italiana per il progresso delle scienze, dando su di esse alcune notizie.

Il Corrisp. Lauricella presenta, a nome del Socio Volterra, le *Lezioni di Analisi infinitesimale* del prof. Giulio Vivanti, rilevandone i pregi scientifici e didattici, ed in particolare la ben riuscita fusione del Calcolo integrale col differenziale.

E. M.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentata nella seduta del 5 marzo 1911.

Agamennone G. — Brevi cenni sull'organizzazione del servizio sismico in Italia con l'elenco dei principali Osservatorî sismici italiani. (Estr. dal « Boll. della Soc. Sism. Ital. », vol. XIII). Modena, 1908. 8°.

Aloisi P. — Le così dette Miloniti dell'isola d'Elba. (Estr. dagli « Atti della Soc. Tosc. di Sc. Nat. ». Memorie, vol. XXVII). Pisa, 1911. 8°.

Barbette É. — Le dernier théorème de Fermat. Liège, 1910. 8°.

Boccardi G. — Sulla latitudine di Torino. (Estr. dall' « Annuario Astronomico pel 1911 »). Torino, 1911. 8°.

Cabreira A. — Algumas palavras sobre o planeta Marte. Lisboa, 1901, 8°.

Cabreira A. — Demonstração mathematica do seguro *Portugal previdente*. Lisboa, 1907. 8°.

Cabreira A. — Descoberta e primeiras propriedades geometricas de uma espiral binomia do primeiro grau. (Extr. do « Jornal de scien. mathem. phys. e natur. », ser. 2ª, t. V). Lisboa, 1897. 8°.

Cabreira A. — Methodos novos para determinar o lado e a area de qualquer polygono regular. (Extr. do Jornal de scien. mathem. phys. e natur. ». s. 2ª, t. V). Lisboa, 1898. 8°.

Cabreira A. — Note sur les rapports des solides. (Separ. do « Instituto »). Coimbra, 1905. 8°.

Cabreira A. — Note sur les rapports polygonaux. (Sonderab. aus dem « Jahresbericht der deuts. Mathem.-Vereinigung », Bd. XIII). Leipzig, 1904, 8°.

Cabreira A. — Sobre algumas applicações do theorema de Tinseau. (Estr. do « Jornal de scien. mathem. phys. e natur. », S. 2ª, t. V). Lisboa, 1897, 8°.

Cabreira A. — Sobre as psopriedades polares dos pontos (Extr. do « Jornal de scien. mathem., phys. e nat. », S. 2ª, t. VI). Lisboa, 1900, 8°.

Cabreira A. — Sobre a consideração da irradiação no problema dos seguros de vida. (Separ. de « Trabalhos da Acad. de scienc. de Portugal », t I). Lisboa, 1808. 8°.

Cabreira A. — Sobre a theoria dos logarithmos de ordem N. (Extr. do « Jornal de sciencias mathem., phys. e nat. », S. 2ª, t. V). Lisboa, 1898. 8°.

Cabreira A. — Sobre o calculo das phases de uma funcção simples. (Extr. do « Jornal de scien. mathem., phys. e nat. », S. 2ª, t. VI). Lisboa, 1900. 8°.

Cabreira A. — Sobre o calculo das reservas mathematicas. Lisboa, 1907, 8°.

Cabreira A. — Sobre os polyedros regulares convexos. (Extr. do « Jornal de scien. mathem., phys. e nat. ». S. 2ª, t. VI). Lisboa, 1902. 8°.

Cabreira A. — Sur l'aire des polygones. Lisbonne, 1897. 8°.

Cabreira A. — Sur la géométrie des courbes trascendantes; mémoires originaux. Lisbonne, 1896. 8°.

Cabreira A. — Sur le probléme relatif a la résolution d'un triangle dont on connait deux cotés et l'angle opposé a l'un d'eux. (Extr. du « Bulletin des sc. mathém. et phys. élémentaires ». An. 1906). Paris, 1906. 8°.

Cabreira A. — Sur les corps polygonaux. Coïmbre, 1907. 8°.

Cabreira A. — Sur les polynômes dérivés. Lisbonne, 1906. 8°.

Cabreira A. — Sur les propriétés de deux cercles égaux et tangents. (Separ. do « Instituto »). Coïmbre, 1906. 8°.

Cabreira A. — Sur les propriétés des nombres en diagonale. (Extr. des « Tra-

balhos da Acad. de sciences de Portugal ». Ser. I, t. II). Lisbonne, 1910. 8°.

Cabreira A. — Um theorema sobre a area dos polygonos regulares. Lisboa, 1901. 8?.

Celoria G. — Sull'eclisse totale di luna del 16 novembre 1910. (Estr. dai « Rend. del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. ». S. II, vol. 43). Milano, 1910. 8°.

Colson A. — Contribution a l'histoire de la Chimie a propos du livre de M. Ladenburg sur l'histoire du développement de la Chimie depuis Lavoisier. Paris, 1910. 8°.

Donder (de) Th. — Sur l'équations canoniques de Hamilton-Volterra. (Extr. des « Mémoires de la Cl. des sciences de l'Académie roy. de Belgique ». S. 2ª, t. III). Paris, 1911. 4°.

Gabba L. e Volta L. — Osservazioni della cometa 1910 *a*, e della cometa di Halley fatte al R. Osservat. astron. di Brera. (Estr. dai « Rendiconti del R. Ist. Lomb di sc. e lett. ». S. II, vol. 43). Milano, 1910. 8°.

Gabrielli R. — Ignazio Cantalamessa 1856-1896. (Estr. dalla « Rivista Marchigiana », an. VI). Roma, 1910. 8°.

Helmert F. B. — Ueber die Genauigkeit der Dimensionen des Hayfordschen Erdellipsoids. (Sonderabd. aus dem « Sitzungsberichte der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. » 1911, II). Berlin, 1910. 8°.

Kunglica vetenscaps Societetens i Upsala Tvähundraärsminne. Upsala, 1910. 8°.

Mascart J. — Une vague de charleur. (Estr. de « Ciel et Terre »; bull. de la Soc. belge d'Astron., n. 12). Bruxelles, 1910. 8°.

Mattiolo O. — *Chenopodium Amaranticolor* Cost. et Reyn. Nuovo succedaneo dello spinacio. Risultati delle prove fatte nell'anno 1910. (Estr. dagli « Annali della R. Accad. di Agricoltura di Torino », vol. LIV) Torino, 1911. 8°.

Mattiolo O. — Il *Colus hirudinosus* Caval. et Sich. nella flora di Sardegna. (Estr. dagli « Ann. di Botanica » del prof. E. Pirotta, vol. VIII). Roma, 1910. 8°.

Mattirolo O. — I vegetali nell'arte degli antichi e dei primitivi. Discorso letto per l'inaugurazione dell'anno accademico 1910-1911. Torino, 1911. 8°.

Migliorato E. — Note botaniche di vario argomento. Roma, 1910. 8°.

Mortensen Th. — Report on the Echinoderms collected by the Danmark-expedition at North-East Greenland. (Danmark-Expeditionen til Gronlands Nordostyst. 1906-1808. Bind V, 4).

Onoranze al conte comm. prof. Napoleone Passerini, senatore del Regno (25° anniversario della fondaz. dell'Istituto Agrario di Scandricci). Pistoia, 1910. 8°.

Ribaga C. — Nuovi Copeognati sud-africani. (Estr. dal « Redia », vol. VII). Firenze, 1911. 8°.

Teixeira F. G. — Obras sobre Mathematica, vol. V. Coimbra, 1904. 4°.

Tosone D. — La quadratura del circolo con la riga ed il compasso. Roma, 1911. 8°.

Volta e Gabba L. — Osservazioni della Cometa 1910 *a*, e della Cometa di Halley, fatte al R. Osservatorio astronomico di Brera. (Estr. dai « Rendiconti » del R. Istit. Lomb. di sc. e lett. S. II, vol. 43°). Milano, 1910. 8°.

Seduta del 2 aprile 1911.

R. Accademia dei Lincei. Prof. Vincenzo Reina. — *Media pars Urbis.* Rilievo planimetrico ed altimetrico eseguito dagli allievi della Scuola di Applicazione per gli Ingegneri in Roma, colla guida del prof. U. Barbieri e dell'ing. C. Cassinis Firenze, 1911, fol. gr.

Antoniazzi A. — Il valore medio della parallasse solare risultante dalle osservazioni dei passaggi del pianeta

« Eros » fatte all'equatoriale Dembowski (obb. 187^{mm}) dell'Osservat. di Padova dal 23 ottobre 1900 al 13 febbraio 1901. (Estr. da « Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti », anno 1910-11). Venezia, 1911. 8°.

Atti della Commissione d'inchiesta per le industrie bacologica e serica. Vol. I, III, IV. (Min. di Agric. Ind. e Comm. Ispettorato gen. dell'Industria e del Commercio). Roma, 1910, 8°.

Buffa P. — Studî intorno al ciclo partenogenetico dell'*Heliotrips haemorrhoidalis*, Bouché. (Estr. dal « Redia » vol. VII). Firenze, 1911. 8°.

Carnoy H. — Sur les travaux mathématiques de M. Ernest Lebon. Paris, 1910. 8°.

Colonnetti G. — Le linee d'influenza della trave continua. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino », vol. XLVI). Torino, 1911. 8°.

Eredia F. — La temperatura in Italia. (Estr. dagli « Annali dell'Ufficio Centrale di Meteor. e Geod. », vol. XXXI). Roma, 1911. 4°.

Guyot J. — Étude théorique et expérimentel snr la théorie de Nernst et les différences de potentiel au contact de deux électrolytes. Clermond-Ferrand, 1907. 8°.

Henriksen G. — Geological Notes. Christiania, 1910. 8°.

Janet Ch. — Note sur la phylogénèse de l'insecte. Rennes, 1909. 8°.

Janet Ch. — Sur la morphologie de l'insecte. Limoges, 1909. 8°.

Janet Ch. — Sur l'ontogénèse de l'insecte. Limoges, 1909. 8°.

Koerner G. — La determinazione del Luogo Chimico nei composti così detti aromatici. Milano, 1910, 8°.

Lacroix A. — Les minéraux radioactifs de Madagascar. (Extr. des « Comptes rendus des séances de l'Acad. des Sciences », t. 152). Paris, 1911. 4°.

Lorenzoni G. — Relazione sulla Nota del prof. A. Antoniazzi, intitolata: Il valore medio della parallasse solare risultante dalle osservazioni di passaggi del pianeta « Eros » fatte all'Equatoriale Dembowski dell'Osservatorio di Padova dal 23 ottobre 1900 al 13 febbraio 1901. (Estr. dagli « Atti del R. Istit. di Veneto scienze, lett. ed arti », anno 1910-11). Venezia, 1910. 8°.

Martelli G. — Brevi notizie sulla *Saturnia Pavonia* L. e su un suo parassita. (Estr. dal « Bollett. del Laborat. di Zool. gen. e agr. in Portici », vol. V). Portici, 1911. 8°.

Martelli G. — Breve risposta ad alcune critiche ai mezzi di lotta contro le cavallette. S. l. nè d., 8°.

Martelli G. — La nuova cocciniglia degli agrumi. S. l. nè d. 8°.

Martelli G. — Primo contributo alla biologia del *Phytonomus variabilis* Herbst. (Estr. dal « Bollett. del Lab. di Zoologia gen. e agraria in Portici », vol. V). Portici, 1911. 8°.

Passerini N. — Sul lavoro di vanga. (Estr. dagli « Atti della R. Accad. dei Georgofili », ser. 5ª, vol. VII). Firenze, 1910. 8°.

Reina V. — *Media pars Urbis* Rilievo planimetrico ed altimetrico. (Estr. dai Rend. R. Acc. dei Lincei. Cl. di sc. fisiche, mat. e natur. », vol. XXIX). Roma, 1910. 8°.

Sarasin E. e Tommasina T. — Action de faibles élévations de temperature sur la radioactivité induite. Paris, 1911. 4°.

Sarasin E. e Tommasina T. — Constatation de quelques faits nouveaux en radioactivité induite. (Extr. des « Archives des Sciences phys. et natur. », t. XXXI). Genève, 1911. 8°.

Silvestri F. — Description d'une espèce et d'une variété nouvelles d'insectes de l'ordre des Thysanoures (*Ctenolepisma Kervillei* et *Japix gigas* Brauer var. *syriacus*) recueillies par M. Henri Gadeau de Kerville pendant son voyage zoologique en Syrie. (Extr. du « Bulletin de la Soc. des amis des Sciences natur. de Rouen », 1911). Rouen, 1911. 8°.

Silvestri F. — Termitofili raccolti dal prof. K. Escherich a Ceylon. (Abd. aus

den « Zoolog. Jahrbüchern » Bd. 30). Jena. 1911, 8°.

Silvestri F. — Di una nuova specie di *Aleurodes* vivente sull'olivo. (Estr. dal « Bollett. del Laborat. di Zoologia generale e agraria della R. Scuola sup. d'Agricolt. in Portici », vol. V). Portici, 1911. 8°.

Silvestri F. — Notizie preliminari suilo sviluppo del *Copidosoma Buyssoni* (Meyr) (Hymenoptera: Chalcididae). (Estr. dal « Monitore Zoologico italiano », anno XXI). Napoli, 1910. 8°.

Tommasina Th. e Sarasin Ed. — Action de faibles élévations de temperature sur la radioactivité induite. Paris, 1911. 4°.

Tommasina Th. e Sarasin Ed. — Constatation de quelques faits nouveaux en radioactivité induite. (Extr. des « Archives des Sciences phys. et natur. », t . XXXI). Genève, 1911. 8°.

Seduta del 7 maggio 1911.

Berlese A. — Alcunai Acari entomofili nuovi. (Estr. dal « Redia », vol. VII). Firenze, 1911. 8°.

Bonomini D. Giov. B. — Osservatorio di Memmo. (Estr. dai « Commentari dell'Ateneo di Brescia », 1909-10). Brescia, 1910. 8°.

Cabreira A. — Sur les propriétés des nombres en diagonale. (Extr. des « Trabalhos da Academia de sciencias de Portugal », S. I, t. II). Lisbonne, 1910. 8°.

Colonnetti G. — Sull'equilibrio elastico dei sistemi reticolari piani. (Estr. dagli « Atti della R. Accademia delle scienze di Torino », vol. XLVI). Torino, 1911. 8°.

Duarte N. — Addenda ao Codigo mnemotelegraphico com applicação á meteorologia. Rio de Janeiro, 1911. 8°.

Duarte N. — Codigo mnemo-telegraphico com applicação á meteorologia. Rio de Janeiro, 1911. 8°.

Giordano D. — Trattato di chirurgia. appendice seconda. Compendio di chirurgia operatoria italiana. Torino, 1911. 8°.

Griffini A. — Le specie del genere « Hyperbaenus » Brunner. Studio monografico. Firenze, 1911. 8°.

Izzo R. — Nuova astronomia. Scoperta del vero sistema planetario. Roma, 1911. 8°.

Lebon E. — Sur le calcul avec une équation indéterminée des caractéristiques entrant dans une Table des facteurs premiers des grands nombres. (Extr. du « Bulletin de la Société philomatique de Paris » ser. X, t. II.) Paris, 1910. 8°.

Lehmer (Derrick-Norman). — Factor Table for the first ten millions containing the smallest factor of every number not divisible by 2, 3, 5, or 7 between the limits o and 10.017.000. (Extr. du « Bulletin des scienc. mathem » ser. 2ª, t. XXXV). Paris, 1911. 8°.

Meli R. — Escursioni geologiche eseguite cogli allievi ingegneri della R. Scuola di Applicazione di Roma. Cenno di relazione. Roma, 1910. 8°.

Meli R. — Sull'importazione di una collezione di marmi antichi, cioè, ritrovati negli scavi di Roma, posseduta in Roma dal sig. Filippo Belli. Roma, 1910, fol.

Raffalli A. — Surface exacte du Cercle. Bastie (Corse) Foglio.

Silvestri F. — Sulla posizione sistematica del genere *Termitaphis* Wasm. (Hemiptera) con descrizione di due specie nuove. (Estr. dal « Bollettino del laboratorio di Zoologia generale e agraria di Portici » vol. V). Portici, 1911. 8°.

Taramelli T. — Di un giacimento di li-

gnite in terreno cretaceo presso Olivetta a Nord di Ventimiglia. (Estr. dai « Rendiconti del R. Ist. Lombardo di sc. e lett. vol. XLIV). Milano, 1911. 8°.

Teodoro G. — Le glandule ceripare della femmina della *Pulvinaria camelicola* Sign. (Estr. dal « Redia », vol. VII). Firenze, 1911. 8°.

Vivanti G. — Lezioni di analisi infinitesimale. Pavia, 1911. 8°.